Terminologie Stochastischer Prozesse

Nikolai Nowaczyk

2014-03-31

Dieses Script ist die Ausarbeitung zum einem Vortrag, gehalten im "Seminar zur Wahrscheinlichkeitstheorie" im SS 14 an der Uni Regensburg. Es orientiert sich inhaltlich an [MS05]

1 Grundsätzliche Definitionen

Definition 1 (Stochastischer Prozess)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein W-Raum, $(S, \mathcal{S})$ ein messbarer Raum und $I \subset [0, \infty[$ eine Indexmenge. Eine Familie $X = (X_t)_{t \in I}$ von Zufallsvariablen

$$X_t : (\Omega, \mathcal{F}) \to (S, \mathcal{S}), \qquad t \in I$$

heißt *stochastischer Prozess* mit *Zustandsraum* $(S, \mathcal{S})$. ♦

Bemerkung 2.

(i) Gilt $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$, so spricht man von einem *n-dimensionalen stochatischen Prozess*. Ist $n = 1$, so spricht man von einem *reellen Prozess*.

(ii) In aller Regel ist entweder $I = [0, \infty[$ oder $I = \mathbb{N}$. Dann spricht man von einem *zeitstetigen* bzw. *zeitdiskreten* Prozess.

(iii) Ein Prozess kann also zeitstetig oder zeitdiskret sein. Das hat aber nichts mit seinem Zustandsraum zu tun. Auch auf diesem kann die Verteilung diskret sein oder nicht. ♦

Definition 3 (Pfadabbildungen)**.** Sei $X = (X_t)_{t \in I}$ ein beliebiger stochastischer Prozess und $\omega \in \Omega$. Dann heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} X(\omega) : I &\to S \\ t &\mapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

Pfad von ω. Der Prozess X heißt *(rechts-, links)stetig*, wenn P-fast alle Pfade diese Eigenschaft haben. ♦

Definition 4 (Filtration)**.** Sei $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra, $I \subset [0, \infty[$ und für jedes $t \in I$ sei $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ eine σ-Sub-Algebra. Dann heißt $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ eine *Filtration von* $\mathcal{F}$, falls gilt:

$$\forall s, t \in I : s \leq t \Longrightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t. \qquad ♦$$

Definition 5 (adaptiert)**.** Sei $X = (X_t)_{t \in I}$ ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Zustandsraum $(S, \mathcal{S})$ und $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ eine Filtration von $\mathcal{F}$. Dann heißt X *adaptiert an* $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$, falls gilt: Für alle $t \in I$ ist

$$X_t : (\Omega, F_t) \to (S, \mathcal{S})$$

eine Zufallsvariable, d.h. X_t ist bzgl. $\mathcal{F}_t$ messbar. ♦

Definition 6 (natürliche Filtration)**.** Sei X ein beliebiger stochastischer Prozess wie in Definition 1. Dann heißt $(F_t^X)_{t \in I}$ mit

$$F_t^X := \sigma(X_s, s \leq t)$$

die *natürliche Filtration von* X. ♦

Bemerkung 7. Jeder stochastische Prozess ist an seine eigene natürliche Filtration adaptiert. ♦

Definition 8 (vorhhersagbar)**.** Ein zeitdiskreter stochastischer Prozess $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *previsibel / vorhersagbar* bzgl. einer Filtration $(\mathcal{F})_{n \in \mathbb{N}_0}$, falls gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : X_{n+1} \text{ ist } \mathcal{F}_n\text{-messbar}$$ ♦

2 Gleichheitsbegriffe

Definition 9 (Gleichheit, Unterscheidbarkeit, Versionen)**.** Seien $X = (X_t)_{t \in I}$, $Y = (Y_t)_{t \in I}$.

(i) X und Y heißen *gleich*, falls gilt

$$\forall (\omega, t) \in \Omega \times I : X_t(\omega) = Y_t(\omega).$$

(oder äquivalent: Wenn für alle $\omega \in \Omega$ gilt: $X(\omega) = Y(\omega)$)

(ii) X und Y heißen *ununterscheidbar*, falls für fast alle $\omega \in \Omega$ gilt

$$\forall t \in I : X_t(\omega) = Y_t(\omega).$$ ♦

(oder äquivalent: wenn für fast alle $\omega \in \Omega$ gilt: $X(\omega) = Y(\omega)$).

(iii) X heißt *Version* von Y, falls gilt:

$$\forall t \in I : P(X_t = Y_t) = 1.$$

Bemerkung 10. Sei Z eine positive Zufallsvariable mit stetiger Dichte (z.B. exponentialverteilt). Definiere für jedes $t \in [0, \infty[$

$$X_t := 0, \qquad Y_t := \begin{cases} 0, & t \neq Z, \\ 1, & t = Z. \end{cases}$$

Dann sind X und Y stochastische Prozesse und es gilt

$$P(X_t = Y_t) = P(Y_t = 0) = P(Z \neq t) = 1,$$

also ist X_t eine Version von Y_t. Trotzdem sind X und Y keinesfalls ununterscheidbar: Jeder Pfad von X ist stetig, aber kein Pfad von Y ist stetig. Insbesondere ist also kein Pfad von X gleich einem Pfad von Y. ♦

Lemma 11. Seien $X = (X_t)_{t\geq 0}$ und $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ zwei (rechts-)stetige Prozesse auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und Y eine Version von X. Dann sind X und Y ununterscheidbar. Jeder stochastische Prozess hat also bis auf Ununterscheidbarkeit höchstens eine stetige Version. ♦

Beweis. Wir müssen zeigen:

$$P(\forall t \in [0, \infty[: X_t = Y_t) = 1.$$

Wegen der (Rechts-)stetigkeit fast aller Pfade genügt es aber zu zeigen:

$$P(\forall t \in \mathbb{Q}^+ : X_t = Y_t) = 1.$$

Nach Voraussetzung ist X eine Version von Y. Daher gilt insbesondere

$$\forall t \in \mathbb{Q}^+ : P(X_t \neq Y_t) = 0.$$

Da die abzählbare Vereinigung von Nullmengen eine Nullmenge ist, gilt also

$$P(\forall t \in \mathbb{Q}^+ : X_t = Y_t) = P(\bigcap_{t\in\mathbb{Q}^+} \{X_t = Y_t\}) = 1 - P(\bigcup_{t\in\mathbb{Q}^+} \{X_t \neq Y_t\}) = 1. \qquad \blacksquare$$

Bemerkung 12 (Erinnerung)**.** Sei $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ eine relle Zufallsvariable. Dann heißt das Maß

$$\forall A \in \mathcal{B} : (X_* P)(A) := P_X(A) := P(X^{-1}(A))$$

die *Verteilung von* X. Ist $X' : (\Omega', \mathcal{F}', P') \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ eine weitere relle Zufallsvariable, so ist $X \overset{\mathrm{d}}{=} X'$, also X *in Verteilung gleich* X', falls $P_X = P'_{X'}$. Diese Definition ist auch dann sinnvoll, wenn $\Omega \neq \Omega'$. ♦

Definition 13 (endlich-dimensionale Verteilungen)**.** Seien $X = (X_t)_{t\geq 0}$, $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ zwei reelle stochastische Prozesse (möglicherweise auf verschiedenen W-Räumen definiert). Für jedes n-Tpuel $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$ heißt das Maß, das durch die Gleichung

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{B}^n : P_{(X_{t_1},\ldots,X_{t_n})}(A) &:= P((X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})^{-1}(A)) \\ &= P((X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in A) \end{aligned}$$

definiert wird, eine *endlich-dimensionale Verteilung von* X. Wir sagen X und Y haben *dieselben endlich-dimensionalen Verteilungen*, $X \overset{\mathrm{d}}{=} Y$, falls für alle n und alle $t_1 < \ldots t_n$ die endlich-dimensionale Verteilung von X mit der von Y übereinstimmt, d.h.

$$\forall A \in \mathcal{B}^n : P((X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \in A) = P((Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n}) \in A). \qquad ♦$$

Bemerkung 14. Sind X und Y zwei Versionen voneinander, so haben sie dieselben Verteilungen. ♦

3 Zuwächse, Sprünge, Wartezeiten

Definition 15 (Zuwächse)**.** Für einen stochastischen Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ heißen die Zufallsvariablen $X_t - X_s$, $s \leq t$, *Zuwächse* oder *Inkremente* über $]s,t]$. Solche Zuwächse heißen

(i) *stationär*, falls für alle $t, h \geq 0$ die Verteilung von $X_{t+h} - X_t$ nur von h, also der Differenz der Zeitpunkte, abhängt.

(ii) *unabhängig*, falls für jedes $(n+1)$-Tupel reeller Zahlen $0 \leq t_0 < \ldots < t_n$ gilt: Die Zuwächse $X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sind unabhängig. ♦

Bemerkung 16. Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsstetiger stochastischer Prozess mit diskretem Zustandsraum $\mathbb{N}_0$. Dann gibt es für jeden Pfad $X(\omega)$ genau drei Möglichkeiten:

(i) $X(\omega)$ macht nur endlich viele Sprünge und bleibt dann konstant (langweiliger Spezialfall).

(ii) $X(\omega)$ macht endlich viele Sprünge in endlicher Zeit (Standardfall).

(iii) $X(\omega)$ macht unendlich viele Sprünge in endlicher Zeit (Extremfall, wird meistens ausgeschlossen). Man spricht auch von einer *Explosion*. ♦

Definition 17. Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsstetiger stochastischer Prozess mit diskretem Zustandsraum $\mathbb{N}_0$. Dann heißt der Prozess $T = (T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv definiert durch

$$T_0 := 0, \qquad\qquad T_{n+1} := \inf\{t \geq T_n \mid X_t \neq X_{T_n}\}$$

Sprungzeitprozess. Wir setzen $\inf \emptyset = \infty$. Der Prozess $W := (W_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$W_n := \begin{cases} T_n - T_{n-1}, & T_{n-1} < \infty, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

heißt *Wartezeitprozess.* Schließlich heißt der Prozess $S = (S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, definiert durch

$$S_n := \begin{cases} X_{T_n}, & T_n < \infty, \\ X_a, a := \max(r \in \mathbb{N}_0 \mid T_r < \infty), & T_n = \infty, \end{cases}$$

Sprungprozess. ♦

Bemerkung 18. Es gilt fast sicher

$$X_t = S_n, \text{ falls } T_n \leq t < T_{n+1}.$$ ♦

4 Stoppzeiten und gestoppte Prozesse

Definition 19 (Stoppzeit)**.** Sei $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration. Eine Abbildung $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ heißt *Stoppzeit*, falls

$$\forall n \in \mathbb{N} : \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$$

Eine Stoppzeit τ heißt *beschränkt*, falls $\tau < \infty$ fast sicher gilt. ♦

Definition 20 (Eintrittszeit)**.** Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein an die Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ adaptierter Prozess mit Zustandsraum $(S, \mathcal{S})$. Dann heißt für jedes $A \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} \tau_A : \Omega &\to \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ \omega &\mapsto \inf\{n \in \mathbb{N}_0 \mid X_n(\omega) \in A\} \end{aligned}$$

Eintrittszeit von A. ♦

Bemerkung 21. Wegen

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \{\tau_A \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{X_k \in A\} \in \mathcal{F}_n$$

ist jede Eintrittszeit eine Stoppzeit. ♦

Definition 22. Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein an $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ adapierter Prozess und τ eine beschränkte Stoppzeit. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} X_\tau : \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \begin{cases} X_{\tau(\omega)}(\omega), & \tau(\omega) < \infty, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$ ♦

Definition 23. Ist τ eine Stoppzeit, so heißt

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} \mid \forall n \in \mathbb{N}_0 : A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}$$

die *σ-Algebra der τ-Vergangenheit.* ♦

Lemma 24. Ist τ eine beschränkte Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein adaptierter Prozess, so ist X_τ bzgl. $\mathcal{F}_\tau$ messbar. ♦

Definition 25 (gestoppter Prozess)**.** Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Prozess und τ eine Stoppzeit. Dann heißt $X^\tau = (X_n^\tau)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : X_n^\tau := X_{\tau\wedge n} := \begin{cases} X_\tau, & n \geq \tau, \\ X_n, & n < \tau, \end{cases}$$

der *gestoppte Prozess.* ♦

Rekurrenz und Transienz Markowscher Ketten

Nikolai Nowaczyk

March 11, 2014

Dieses Script ist die Ausarbeitung zum einem Vortrag, gehalten im ´´Seminar zur Wahrscheinlichkeitstheorie" im WS 13/14 an der Uni Regensburg. Es orientiert sich inhaltlich sehr stark an [Kre00, p. 16.3]

Notation

B_i	Anzahl der Besuche von X in i, page 2
$C(i)$	Menge der mit i kommunizierenden Zustände, page 2
$f_{ij}^{(n)}$	Wahrscheinlichkeit, j das erste Mal nach n-Schritten zu erreichen (bei i startend), page 2
f_{ij}^*	Summe der $f_{ij}^{(n)}$, page 2
$(I, \mathcal{I})$	Zustandsraum von X, page 2
$\mathbb{N}$	the natural numbers $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, page 1
$(\Omega, \mathcal{A}, P)$	ein Wahrscheinlichkeitsraum, page 2
$\mathbb{P} = (p_{ij})$	Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten, page 2
P_i	$P_i(\_) := P(\_ \mid X_0 = i)$, page 2
$\mathbb{P}^n = (p_{ij}^{(n)})$	n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten, page 2
$X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$	eine homogene markowsche Kette, page 2

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(I, \mathcal{I})$ ein messbarer Raum und $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine homogene markowsche Kette mit Zustandsraum I. Wir notieren mit $\mathbb{P} = (p_{ij})$ die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten und mit $\mathbb{P}^n = (p_{ij}^{(n)})$ die Matrix der n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten. Es sei $P_i(\_) := P(\_ \mid X_0 = i)$.

Definition 1 (Rekurrenz und Transienz)**.**

(i) Eine markowsche Kette X *besucht* einen Zustand $i \in I$, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $X_n = i$.

(ii) Für jeden Zustand $i \in I$ und jedes definieren wir $B_i := |\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = i\}|$, also die Anzahl der Besuche von X in i.

(iii) Ein Zustand $i \in I$ heißt *rekurrent*, falls er fast sicher unendlich oft besucht wird, wenn man in i startet, d.h. falls

$$P_i(B_i = \infty) = 1.$$

(iv) Ein Zustand heißt *tansient*, falls er nicht rekurrent ist. ♦

Definition 2 (Rückkehrwahrscheinlichkeit)**.** Für alle $n \geq 1$ und $i, j \in I$ definieren wir

$$f_{ij}^{(n)} := P_i(X_1 \neq j, \ldots, X_{n-1} \neq j, X_n = j),$$

d.h. $f_{ij}^{(n)}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach Verlassen von der erste Besuch bei j nach genau n-Schritten eintritt. Wir setzen $f_{ij}^{(0)} := 0$. Wir definieren außerdem

$$f_{ij}^* := \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)},$$

also die Wahrscheinlichkeit, den Zustand j jemals zu erreichen, wenn man von i startet. Insbesondere ist f_{ii}^* die *Rückkehrwahrscheinlichkeit von i* ♦

Bemerkung 3. Man darf die $f_{ij}^{(n)}$ auf keinen Fall mit den $p_{ij}^{(n)}$ verwechseln! Denn $p_{ij}^{(n)}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass man überhaupt in n Schritten von i nach j kommt. Dahingehen ist $f_{ij}^{(n)}$ die Wahrscheinlichkeit, dass man nach n Schritten zum ersten Mal nach j kommt. Auch für die $p_{ij}^{(n)}$ definieren wir

$$p_{ij}^* := \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}.$$

Es gilt offensichtlich $f_{ij}^{(n)} \leq p_{ij}^{(n)}$. ♦

Lemma 4. Es gilt $p^*_{ij} = E_i(B_j)$. ♦

Beweis. Wir rechnen

$$p^*_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} E_i(1_{\{X_n=j\}}) = E_i\left(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X_n=j\}}\right) = E_i(B_j) \qquad \blacksquare$$

Theorem 5. Es gilt $P_i(B_i \geq m) = (f^*_{ii})^m$, $m \geq 1$. ♦

Beweis.

Step 1 (Stoppzeiten): Wir definieren die *Stoppzeiten*

$$\forall \omega \in \Omega : \tau_1(\omega) := \inf\{n \geq 1 \mid X_n(\omega) = i\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

und für alle $m \geq 1$

$$\forall \omega \in \Omega : \tau_{m+1} := \inf\{n > \tau_m(\omega) \mid X_n(\omega) = i\}.$$

Als Infimum der leeren Menge setzen wir ∞. Es ist also τ_m der Zeitpunkt des m-ten Besuchs in i.
Step 2 (Induktionsverankerung $m = 1$): Es gilt offenbar $\{\tau_m < \infty\} = \{B_i \geq m\}$. Per Definition ist f^*_{ii} die Rückkehrwahrscheinlichkeit nach i und somit gilt für $m = 1$

$$P_i(\tau_m < \infty) = (f^*_{ii})^m$$

Step 3 (Induktionsschritt $m \to m + 1$): Wir definieren die Mengen

$$\begin{aligned} D^{n+k}_n &:= \{X_{n+1} \neq i, \ldots, X_{n+k-1} \neq i, X_{n+k} = i\} \\ A_{mn} &:= \{(i_0, \ldots, i_{n-1}) \in I^n \mid i_0 = i \text{ und genau } m-1 \text{ weitere Koordinaten sind } = i\} \end{aligned}$$

und rechnen

$$
\begin{aligned}
P_i(\tau_{m+1} < \infty) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_i(\tau_{m+1} - \tau_m = k, \tau_m = n) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_i(\tau_{m+1} - \tau_m = k \mid \tau_m = n) P_i(\tau_m = n) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_i(D_n^{n+k} \mid X_n = i, (X_0, \ldots, X_{n-1}) \in A_{mn}) P_i(\tau_m = n) \\
&\overset{(15.4)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_i(D_n^{n+k} \mid X_n = i) P_i(\tau_m = n) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_i(D_0^k \mid X_0 = i) P_i(\tau_m = n) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} \sum_{n=1}^{\infty} P_i(\tau_m = n) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} P_i(\tau_m < \infty) \\
&= P_i(\tau_m < \infty) \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} \\
&= (f_{ii}^*)^m f_{ii}^* = (f_{ii}^*)^{m+1}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt die Behauptung. ■

Theorem 6 (Rekurrenzsatz)**.** Sei $i \in I$ ein beliebiger Zustand. Dann sind äquivalent

(i) $f_{ii}^* = 1$

(ii) i ist rekurrent.

(iii) $p_{ii}^* = \infty$. ♦

Beweis.

"*(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)*“: Ist $f_{ii}^* = 1$, dann gilt

$$P_i(B_i = \infty) = \lim_{m \to \infty} P_i(B_i \geq m) \overset{\text{Theorem } 5}{=} \lim_{m \to \infty} (f_{ii}^*)^m = 1,$$

also ist i rekurrent.

"*(ii)* $\Longrightarrow$ *(iii)*“: Sei i rekurrent. Dann gilt also $P_i(B_i = \infty) = 1$. Daraus folgt

$$p_{ii}^* \overset{\text{Lemma } 4}{=} E_i(B_i) = \infty.$$

"$(iii) \Longrightarrow (i)$“: Es gelte $p_{ii}^* = \infty$. Wir zeigen die Aussage per Widerspruch. Wenn $f_{ii}^* < 1$, dann folgt

$$\sum_{m=1}^{\infty} P_i(B_i \geq m) \overset{\text{Theorem 5}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} (f_{ii}^*)^m < \infty, \tag{0.1}$$

gemäß geometrischer Reihe. Die Glieder dieser Reihe müssen demnach eine Nullfolge bilden und es gilt

$$0 = \lim_{m\to\infty} P_i(B_i \geq m) = P_i(B_i = \infty).$$

Daher ist also B_i fast sicher endlich und es gilt

$$\begin{aligned} p_{ii}^* = E_i(B_i) &= \sum_{k=1}^{\infty} k P_i(B_i = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{k} P_i(B_i = k) \\ &= \sum_{\substack{(k,m)\in\mathbb{N} \\ m\leq k}} P_i(B_i = k) = \sum_{\substack{(m,k)\in\mathbb{N} \\ k\geq m}} P_i(B_i = k) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=m}^{\infty} P_i(B_i = k) = \sum_{m=1}^{\infty} P_i(B_i \geq m) \overset{(0.1)}{<} \infty. \end{aligned}$$

Widerspruch! ■

Bemerkung 7. In praktischen Anwendungen ist das Kriterium $p_{ii}^* < \infty$ sehr viel leichter nachzuprüfen als $f_{ii}^* = 1$. Denn für $p_{ii}^* < \infty$ genügt es, Abschätzungen für die $p_{ij}^{(n)}$ herzuleiten. Um $f_{ii}^* = 1$ nachzuprüfen, muss der Grenzwert einer unendlichen Reihe exakt bestimmt werden. ♦

Korollar 8.

(i) Alle mit einem rekurrenten Zustand kommunizierenden Zustände sind rekurrent.

(ii) Ist i rekurrent, so gilt für alle j mit $i \rightsquigarrow j$ die Gleichung $f_{ji}^* = 1$.

(iii) Jeder rekurrente Zustand ist wesentlich. ♦

Beweis.

(i) Sei i rekurrent und $j \in C(i)$. Dann gibt es also m, k, sodass $i \rightsquigarrow j[m]$ und $j \rightsquigarrow i[k]$, d.h. $p_{ij}^{(n)} > 0$ und $p_{ji}^{(k)} > 0$. Nach Voraussetzung ist i rekurrent und somit gilt nach Theorem 6 $p_{ii}^* = \infty$. Daraus folgt

$$p_{jj}^* = \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n+k+m)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} p_{ji}^{(k)} p_{ij}^{(m)} = \infty,$$

also ist auch j rekurrent nach Theorem 6.

(ii) Angenommen, $f_{ji}^* < 1$. Wegen $i \rightsquigarrow j$ existiert also m mit $p_{ij}^{(m)} > 0$. . Da i rekurrent ist, gilt gemäß Theorem 6

$$\begin{aligned}
1 &= P_i(\exists n > m : X_n = i) \\
&= \sum_{k \in I} P_i(\exists n > m : X_n = i, X_m = k) \\
&= \sum_{k \in I} P_i(\exists n > m : X_n = i \mid X_m = k) P_i(X_m = k) \\
&= \sum_{k \in I} P(\exists n > 0 : X_{n+m} = i \mid X_m = k, X_0 = i) p_{ik}^{(m)} \\
&= \sum_{k \in I} P(\exists n > 0 : X_{n+m} = i \mid X_m = k) p_{ik}^{(m)} \\
&= \sum_{k \in I} P_i(\exists n > 0 : X_n = i \mid X_0 = k) p_{ik}^{(m)} \\
&= \sum_{k \in I} P_k(\exists n > 0 : X_n = i) p_{ik}^{(m)} \\
&= \sum_{k \in I} f_{ki}^* p_{ik}^{(m)} \\
&= p_{ij}^{(m)} f_{ji}^* + \sum_{j \neq k \in I} f_{ki}^* p_{ik}^{(m)} \\
&= p_{ij}^{(m)} f_{ji}^* + \sum_{j \neq k \in I} \underbrace{f_{ki}^*}_{\leq 1} p_{ik}^{(m)} \\
&\leq p_{ij}^{(m)} f_{ji}^* + \sum_{j \neq k \in I} p_{ik}^{(m)} \\
&= p_{ij}^{(m)} f_{ji}^* + 1 - p_{ij}^{(m)} \\
&= \underbrace{(f_{ji}^* - 1)}_{<0} \underbrace{p_{ij}^{(m)}}_{>0} + 1 < 1
\end{aligned}$$

Widerspruch! ■

Literaturverzeichnis

[Kre00] Ulrich Krengel. *Einfhrung in die Wahrscheinlichkeitshteorie und Statistik*. Vieweg, 2000.

Semimartingale

Nikolai Nowaczyk

2014-01-22

Dieses Script ist die Ausarbeitung zum einem Vortrag, gehalten im “Seminar zur Wahrscheinlichkeitstheorie” im WS 13/14 an der Uni Regensburg. Es orientiert sich inhaltlich an [Kle06, p. 9.3] und [JP02, Kap. 26].

1 Grundsätzliche Definitionen

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein W-Raum und $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration von $\mathcal{F}$.

Definition 1 (Semimartingal)**.** Ein reellwertiger stochastischer Prozess $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Semimartingal*, falls

(i) X ist integrierbar, d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : E(|X_n|) < \infty$.

(ii) X ist an $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adaptiert, d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : X_n$ ist $\mathcal{F}_n$-messbar.

(iii) Es gilt $\forall m \leq n : X_m \leq E(X_n \mid \mathcal{F}_m)$ fast sicher oder $\forall m \leq n : X_m \geq E(X_n \mid \mathcal{F}_m)$ fast sicher.

Falls “$\leq$” gilt, dann heißt X ein *Submartingal*, falls “$\geq$” gilt, dann heißt X ein *Supermartingal*. ♦

Bemerkung 2.

(i) Ein Semimartingal X ist ein Martingal genau dann, wenn X ein Sub- und ein Supermartingal ist.

(ii) Ein reellwertiger stochastischer Prozess X ist genau dann ein Submartingal, wenn $-X$ ein Supermartingal ist.

(iii) Ist X ein Submartingal und $c \geq 0$, so ist auch cX ein Submartingal. Ist $c \leq 0$, so ist cX ein Supermartingal. (Analog, falls X ein Supermartingal).

(iv) Sind X und Y Submartingale, so auch $X + Y$. (Analog für Supermartingale.)

(v) Linearkombinationen von Martingalen sind Martingale.

(vi) Sind X und Y Supermartingale, dann ist $\min(X,Y)$ ein Supermartingal. Sind X und Y Submartingale, dann ist $\max(X,Y)$ ein Submartingal. ♦

Theorem 3. Sei $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, sodass $\varphi(M_n) \in L^1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(\varphi(M_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ein Submartingal. ♦

Beweis. Sei $m \leq n$. Da M ein Martingal ist, gilt also $M_m = E(M_n \mid \mathcal{F}_m)$ fast sicher. Daraus folgt mit der Jensenschen Ungleichung, siehe [JP02, Thm. 23.9],

$$\varphi(M_m) = \varphi(E(M_n \mid \mathcal{F}_m)) \leq E(\varphi(M_n) \mid \mathcal{F}_m).$$ ■

Theorem 4. Sei T eine durch C beschränkte Stoppzeit.

(i) Falls X ein Martingal ist, dann gilt $E(X_T) = E(X_0)$.

(ii) Falls X ein Submartingal ist, dann gilt $E(X_T) \leq E(X_C)$. ♦

Theorem 5. Sei X ein Submartingal (Supermartingal). Dann ist die Folge $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend (fallend). ♦

Beweis. Es gilt für Submartingale

$$E(X_n) \leq E(E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)) = E(X_{n+1})$$

und analog für Supermartingale. ■

Theorem 6 (Doob-Zerlegung)**.** Sei X ein adaptierter integrierbarer Prozess. Dann existiert eine eindeutige Zerlegung $X = M + A$, wobei M ein Martingal und A vorhersagbar ist mit $A_0 = 0$. Diese Darstellung heißt *Doob*-Zerlegung. X ist genau dann ein Sub-(Super-)martingal, wenn A monoton wachsend (fallend) ist. ♦

Beweis.

Step 1 (Existenz): Wir definieren für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} M_n &:= X_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k - E(X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}), \\ A_n &:= \sum_{k=1}^{n} E(X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) - X_{k-1}. \end{aligned}$$

Dann gilt offenbar

$$\begin{aligned} M_n + A_n &= X_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k - E(X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} E(X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) - X_{k-1} \\ &= X_0 + X_n - X_0 = X_n. \end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist A vorhersagbar und es gilt $A_0 = 0$. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$E(M_n - M_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E(X_n - E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}) = 0,$$

also ist M ein Martingal.

Step 2 (Eindeutigkeit): Seien $X = M + A = M' + A'$ zwei Doob-Zerlegungen. Dann ist $M - M' = A' - A$ ein vorhersagbares Martingal. Daraus folgt gemäß Lemma 7 $M_n - M_n' = M_0 - M_0' = 0$, also $M = M'$ und damit dann auch $A = A'$.
Step 3 (Monotonie): Ist X ein Submartingal, dann gilt

$$A_{n+1} - A_n = E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) - X_n \geq 0$$

und analog für Supermartingale. ■

Lemma 7. Sei X ein vorhersagbares Martingal. Dann gilt fast sicher $X_n = X_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. ♦

Beweis. Die Aussage gilt offensichtlich für $n = 0$. Es gilt

$$X_{n+1} = E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n$$

und damit folgt die Behauptung induktiv. ■

2 Diskretes Stochastisches Integral

Definition 8. Sei X ein reeller adaptierter Prozess und H reell und vorhersagbar. Dann heißt der Prozess $H \cdot X$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : (H \cdot X)_n := \sum_{m=1}^{n} H_m (X_m - X_{m-1}),$$

diskretes stochastisches Integral von H bzgl. X. Ist X ein Martingal, so heißt $H \cdot X$ die *Martingaltransformierte von X*. ♦

Bemerkung 9. Auch $H \cdot X$ ist adaptiert. ♦

Theorem 10 (Stabilitätssatz für stochastische Integrale)**.** Sei X ein adaptierter stochastischer Prozess mit $E(|X_0|) < \infty$.

(i) X ist genau dann ein Martingal, wenn für jeden lokal beschränkten vorhersagbaren Prozess H (d.h. jedes H_n ist beschränkt) der Prozess $H \cdot X$ ein Martingal ist.

(ii) X ist genau dann ein Sub- (Super-)Martingal, wenn für jeden lokal beschränkten vorhersagbaren Prozess H mit $H \geq 0$, der Prozess $H \cdot X$ ein Sub- (Super-)martingal ist. ♦

Beweis. Sei X ein Martingal. Dann gilt $E(X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n) = 0$ und damit

$$\begin{aligned}
E((H \cdot X)_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) &= E((H \cdot X)_n + H_{n+1}(X_{n+1} - X_n) \mid \mathcal{F}_n) \\
&= E((H \cdot X)_n \mid \mathcal{F}_n) + E(H_{n+1}(X_{n+1} - X_n) \mid \mathcal{F}_n) \\
&= (H \cdot X)_n + H_{n+1} E(X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n) \\
&= (H \cdot X)_n.
\end{aligned}$$

Sei umgekehrt $H \cdot X$ ein Martingal für jedes solche H. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und definiere $H_m := 1_{\{m=n\}}$. Dann ist H vorhersagbar und $(H \cdot X)_{n-1} = 0$. Also gilt

$$0 = (H \cdot X)_{n-1} = E((H \cdot X)_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1}.$$

Die Aussagen über Semimartingale folgen analog. ■

Bemerkung 11. Man nennt Theorem 10 auch manchmal "Can't beat the system". ♦

3 Martingalungleichungen

Lemma 12. Es sei M ein Martingal und

$$M_n^* := \max_{0 \leq j \leq n} |M_j|.$$

Dann ist $M^* = (M_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Submartingal. ♦

Wir erinnern an die Markowsche Ungleichung: Für jedes $\alpha > 0$ und jede Zufallsvariable $X \geq 0$ gilt

$$P(X \geq \alpha) \leq \tfrac{1}{\alpha} E(X). \tag{3.1}$$

Das gilt also insbesondere für $X = M_n^*$:

$$P(M_n^* \geq \alpha) \leq \tfrac{1}{\alpha} E(M_n^*).$$

Für Martingale kann diese Ungleichug jedoch entscheidend verbessert werden.

Theorem 13 (Doobs Erste Martingalungleichung)**.** Sei M ein Martingal (oder ein positives Submartingal). Dann gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall \alpha > 0 : P(M_n^* \geq \alpha) \leq \tfrac{1}{\alpha} E(|M_n|).$$ ♦

Beweis. Wir führen den Beweis für den Fall, dass M ein Martingal ist. Wir definieren $T := \min\{j \in \mathbb{N} \mid |M_j| \geq \alpha\}$. Da $\varphi(x) = |x|$ eine konvexe Funktion ist, ist $|M| := (|M_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Submartingal, siehe Theorem 3. Man mache sich außerdem klar, dass gilt:

$$\{T \leq n, |M_T| \geq \alpha\} = \{M_n^* \geq \alpha\}.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} P(M_n^* \geq \alpha) &= P(T \leq n, |M_T| \geq \alpha) \\ &= P(|M_T| 1_{\{T \leq n\}} \geq \alpha) \\ &\overset{(3.1)}{\leq} \tfrac{1}{\alpha} E(|M_T| 1_{\{T \leq n\}}) \\ &\leq \tfrac{1}{\alpha} E(|M_T|) \leq \tfrac{1}{\alpha} E(|M_n|), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Theorem 5 benutzen. ■

Lemma 14. Sei $X \geq 0$ eine eine Zufallsvariable, $p > 0$, $E(X^p) < \infty$. Dann gilt

$$E(X^p) = \int_0^\infty p\lambda^{p-1} P(X > \lambda) d\lambda. \qquad \blacklozenge$$

Beweis. Es gilt unter Verwendung des Satzes von Fubini

$$\begin{aligned}\int_0^\infty p\lambda^{p-1} P(X > \lambda) d\lambda &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1} E(1_{X>\lambda}) d\lambda = E\Big(\int_0^\infty p\lambda^{p-1} 1_{\{X>\lambda\}} d\lambda\Big) \\ &= E\Big(\int_0^X p\lambda^{p-1} d\lambda\Big) = E(X^p). \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Theorem 15 (Doobs $\boldsymbol{L^p}$-Martingalungleichungen)**.** Sei M ein Martingal (oder ein positives Submartingal) und $1 < p < \infty$. Dann existiert eine Konstante $c > 0$, sodass

$$\forall n \in \mathbb{N} : E((M_n^*)^p) \leq cE(|M_n|^p). \qquad \blacklozenge$$

Beweis. Wir führen den Beweis für den Fall, dass M ein Martingal ist. Gemäß Theorem 3 ist $|M|$ ein Submartingal. Sei $X_n := M_n 1_{\{|M_n| > \frac{\alpha}{2}\}}$. Für festes $n \in \mathbb{N}$, definiere

$$\forall 0 \leq j \leq n : Z_j := E(X_n \mid \mathcal{F}_j).$$

Dann ist $(Z_j)_{0 \leq j \leq n}$ ein Martingal, denn für alle $k \leq j$ gilt gemäß Turmeigenschaft

$$E(Z_j \mid \mathcal{F}_k) = E(E(X_n \mid \mathcal{F}_j) \mid \mathcal{F}_k) = E(X_n \mid \mathcal{F}_k) = Z_k.$$

Außerdem gilt für alle $0 \leq j \leq n$

$$\begin{aligned}|M_j| &= |E(M_n \mid \mathcal{F}_j)| \\ &= |E(M_n 1_{\{|M_n| > \frac{\alpha}{2}\}} + M_n 1_{\{|M_n| \leq \frac{\alpha}{2}\}} | \mathcal{F}_j)| \\ &\leq |E(M_n 1_{\{|M_n| > \frac{\alpha}{2}\}} \mid \mathcal{F}_j)| + E(|M_n 1_{\{|M_n| \leq \frac{\alpha}{2}\}}| | \mathcal{F}_j) \\ &\leq |E(X_n \mid \mathcal{F}_j)| + \tfrac{\alpha}{2} \\ &= |Z_j| + \tfrac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

und damit $M_n^* \leq Z_n^* + \frac{\alpha}{2}$. Damit erhält man

$$M_n^* > \alpha \Longrightarrow \alpha < M_n^* \leq Z_n^* + \tfrac{\alpha}{2} \Longrightarrow \tfrac{\alpha}{2} < Z_n^*$$

und somit mittels Doobs erster Ungleichung, Theorem 13,

$$P(M_n^* > \alpha) \leq P(Z_n^* > \tfrac{\alpha}{2}) \leq \tfrac{2}{\alpha} E(|Z_n|) = \tfrac{2}{\alpha} E(|X_n|) = \tfrac{2}{\alpha} E(|M_n| 1_{\{|M_n| > \frac{\alpha}{2}\}}).$$

Damit erhalten wir schlussendlich (unter erneuter Verwendung des Satzes von Fubini und Lemma 14)

$$\begin{aligned}E((M_n^*)^p) &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1} P(M_n^* > \lambda) d\lambda \\ &\leq \int_0^\infty 2p\lambda^{p-2} E(|M_n| 1_{\{|M_n| > \frac{\lambda}{2}\}}) d\lambda \\ &\leq E\Big(\int_0^{2|M_n|} 2p\lambda^{p-2} d\lambda |M_n|\Big) \\ &= \tfrac{2^p p}{p-1} E(|M_n|^p). \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Bemerkung 16. Man kann zeigen, dass für c sogar die Konstante $c^{1/p} = \frac{p}{1-p}$ gewählt werden kann. Dann bekommt man

$$\|M_n\|_{L^p} \leq q\|M_n\|_{L^p}.$$ ♦

Literatur

[JP02] Jacod and Protter. *Probability Essentials.* Springer, 2002.

[Kle06] Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Springer, 2006.