Differenzenfolgen und Polynome

Nikolai Nowaczyk

May 5, 2011

In diesem Text wollen wir folgendes Phänomen untersuchen (genauere Definitionen siehe Abschnitt 1): Gegeben sei eine Zahlenfolge $x = (x_n)$. Dann kann man die Folge $\Delta(x)_n = x_{n+1} - x_n$ ihrer Differenzen berechnen und erhält wieder eine Zahlenfolge. Diese Prozedur kann man im Prinzip beliebig oft durchführen. Dabei fällt auf, dass bei manchen Zahlenfolgen die Differenzenfolgen irgendwann konstant werden und dass diese Folgen dann Polynome sind. Wir betrachten ein Beispiel:

$$\begin{tikzcd}
n & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
x_n & 5 \arrow[d] & 6 \arrow[d] \arrow[dl] & 13 \arrow[d] \arrow[dl] & 26 \arrow[d] \arrow[dl] & 45 \arrow[d] \arrow[dl] & 70 \arrow[d] \arrow[dl] & 101 \arrow[dl] \\
\Delta(x)_n & 1 \arrow[d] & 7 \arrow[d] \arrow[dl] & 13 \arrow[d] \arrow[dl] & 19 \arrow[d] \arrow[dl] & 25 \arrow[d] \arrow[dl] & 31 \arrow[dl] & \\
\Delta(\Delta(x))_n & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & &
\end{tikzcd}$$

In diesem Beispiel ist die Zahlenfolge x gegeben durch

$$x_n = 3n^2 - 2n + 5,$$

die Differenzenfolge $\Delta(x)$ davon durch

$$\Delta(x)_n = 6n + 1$$

und die davon wiederum gebildete Differenzenfolge $\Delta(\Delta(x))_n$ ist konstant $= 6$. Würde man nochmals zur Differenzenfolge übergehen, wäre diese also konstant $= 0$. Wir machen folgende Beobachtungen:

- Die ursprüngliche Folge x is ein Polynom vom Grad 2, die erste Differenzenfolge ist ein Polynom vom Grad 1 und die nochmals gebildete Differenzenfolge ein Polynom vom Grad 0. Daher vermuten wir: Ist x ein Polynom vom Grad k, so ist $\Delta(x)$ ein Polynom vom Grad $k - 1$. Dies ist in der Tat richtig und wird in Satz 2.2 bewiesen.
- Diese Beobachtung legt die Vermutung nahe, dass auch die Umkehrung gilt: Ist x irgendeine Zahlenfolge, sodass die wieder und wieder gebildete Differenzenfolge nach k Schritten konstant ist, dann ist x ein Polynom vom Grad k. Diese Richtung ist schwieriger zu zeigen und Hauptgegenstand dieses Textes. Wir stellen in Abschnitt 1 zunächst die nötigen Definitionen nochmal präzise zusammen. In Abschnitt 2 wird diese Vermutung präzise als Satz 2.5 formuliert und bewiesen.

Wozu ist so ein Satz gut? Der Sachverhalt als solcher ist nützlich, wenn man das Bildungsgesetz der ursprünlichen Folge x so direkt nicht kennt. Das ist zum Beispiel bei rekursiv definierten Folgen der Fall. Vermutet man, dass die Folge ein Polynom ist, so kann man dies mit obigem Verfahren immerhin überprüfen und den Grad des Polynoms bestimen. Dieses Prinzip wurde von Frau Schuller auf der Winterakademie 2010 vorgestellt. Dort ging es vor allem darum, wie man das Verfahren praktisch ausnutzt und auch um das Problem, die Koeffizienten des Polynoms zu bestimmen. Die Stunde war Motivation für den vorliegenden Text.
Die Koeffizienten eines Polynoms zu bestimmen ist ein so genannten *quantitatives Problem*, d.h. man möchte wirklich etwas ausrechnen. Uns geht es hier im Wesentlichen darum, das zu Grunde liegende *qualitative Problem* zu lösen, d.h. wir wollen beweisen, dass diese Koeffizienten überhaupt existieren. Qualitative Sätze sind Sätze, die Aussagen über Existenz von Objekten und ihre Struktur machen - unabhängig davon, ob man diese Objekte dann konkret berechnen kann oder nicht. Das klingt zunächst nutzlos, aber oft führt der Erkenntnisfortschritt, den qualitative Sätze zur Mathematik beitragen, letztendlich doch dazu, dass dann auch quantitative Sätze folgen. Außerdem sind qualitative Sätze cool.

1 Zahlenfolgen, Differenzen und Polynome

1.1 Definition (Zahlenfolge). Wir notieren mit

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

die natürlichen Zahlen (beginnend bei 0) und mit

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$$

den Raum der reellen Zahlenfolgen. Etwas abweichend von der Schulbuchliteratur sagen wir also $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist eine reelle Zahlenfolge. Wir notieren mit x_n ihr n-tes Glied. Häufig schreibt man für die Folge als Ganzes (x_n) oder $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Um eine Zahlenfolge x zu definieren, genügt es natürlich eine Formel für jedes ihrer Glieder x_n anzugeben.

1.2 Definition (Differenzenoperator). Für jede Zahlenfolge $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$\Delta(x)_n := x_{n+1} - x_n.$$

Dies definiert eine Abbildung $\Delta : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $x \mapsto \Delta(x)$, welche wir *Differenzenoperator* nennen wollen. Dieser schickt eine Zahlenfolge x auf die Folge $\Delta(x)$. Die Folge $\Delta(x)$ besteht also aus den Differenzen der aufeinanderfolgenden Glieder der Folge x.

1.3 Definition (Operatorpozenten). Man kann Δ als eine lineare Abbildung $\Delta : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ auffassen und daher auch mehrfach anwenden. Für eine Zahlenfolge x, ist $\Delta(x)$ erneut eine Zahlenfolge. Somit kann man

$$\Delta^2(x) := (\Delta \circ \Delta)(x) = \Delta(\Delta(x))$$

betrachten. Hierbei steht "$\circ$" wie immer für die Verkettung von Abbildungen. Allgemein setzen wir für jedes $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$,

$$\Delta^k := \underbrace{\Delta \circ \Delta \ldots \circ \Delta}_{k\text{-mal}}.$$

$\Delta^k(x)$ ist also die Zahlenfolge, die man erhält, indem man k-mal hintereinander sukzessive Differenzen bildet. Zusätzlich wollen auch wir die in der Literatur übliche Konvention verwenden, dass

$$\Delta^0(x) := x. \tag{1.1}$$

1.4 Definition (Polynom). Eine Zahlenfolge $p \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ heißt *Polynom*[1], falls es ein $k \in \mathbb{N}$ und reelle Zahlen $a_0, \ldots, a_k$ gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$p_n = \sum_{i=0}^{k} a_i n^i, \qquad a_k \neq 0.$$

Wir nennen dann auch

$$\mathrm{grad}(p) := k,$$

den *Grad des Polynoms p*. Es ist ausdrücklich $k = 0$ erlaubt. In diesem Fall ist x die konstante Folge $x_n = a_0$. Man unterscheidet bei Polynomen vom Grad 0 manchmal noch, ob $a_0 = 0$ gilt. In diesem Fall ist x das *Nullpolynom*, dem man manchmal den Grad $-\infty$ zuweist. Man benutzt dann die Konvention $-\infty < 0$. Das machen wir aber nicht. Für uns hat auch das Nullpolynom Grad 0.

2 Hauptsatz

Wir beweisen zunächst unsere erste Vermutung. Der Beweis benötigt eine Verallgemeinerung der binomschen Formel, den so genannten *binomischen Lehrsatz*, den wir hier ohne Beweis zitieren.

2.1 Theorem (binomischer Lehrsatz). Für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

wobei

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

die so genannten *Binomialkoeffizienten* sind. Ihre genauen Werte spielen für uns keine Rolle, weil wir ja nur an der *Existenz* von Koeffizienten und nicht an den konkreten Werten interessiert sind.

2.2 Theorem. Sei $p : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad k und die Zahlenfolge $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definiert durch

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n := p(n).$$

Dann gibt es ein Polynom $q : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ vom Grad $k-1$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\Delta(x)_n = q(n).$$

Insbesondere gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, sodass

$$\Delta^k(x)_n = c.$$

[1] Diese Definition des Begriffs 'Polynom' ist eine didaktische Lüge. Der Begriff ist in der Algebra viel abstrakter und allgemeiner definiert, aber das würde hier zu weit führen. Daher dürft ihr den Algebraikern nicht verraten, dass wir Polynome hier so definiert haben.

Beweis. Es sei
$$p(n) = \sum_{\mu=0}^{k} a_\mu n^\mu.$$
Dann gilt nach Definition
$$\begin{aligned}
\Delta(x)_n = x_{n+1} - x_n = p(n+1) - p(n) &= \sum_{\mu=0}^{k} a_\mu (n+1)^\mu - \sum_{\mu=0}^{k} a_\mu n^\mu \\
&\overset{2.1}{=} \sum_{\mu=0}^{k} a_\mu \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} n^\nu - \sum_{\mu=0}^{k} a_\mu n^\mu \\
&= \underbrace{\sum_{\mu=0}^{k-1} a_\mu \sum_{\nu=0}^{\mu} \binom{\mu}{\nu} n^\nu - \sum_{\mu=0}^{k-1} a_\mu n^\mu}_{\text{hat Grad } \le k-1} + \underbrace{a_k \sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{k}{\nu} n^\nu + a_k \binom{k}{k} n^k - a_k n^k}_{\text{hat Grad } = k-1} =: q(n).
\end{aligned}$$
Es ist also q ein Polynom vom Grad $k-1$. Dabei haben wir im letzten Schritt zunächst die beiden äußeren Summen über μ von $\mu = 0$ bis $\mu = k-1$ betrachtet und danach noch den Summanden $\mu = k$. Hierbei haben wir wiederum die innere Summe über ν aufgespalten in eine Summe von $\nu = 0$ bis $\nu = k-1$ und dann auch hier den Summanden $\nu = k$ separat betrachtet.
Die zweite Aussage folgt nun, durch sukzessive Anwendung der ersten: Falls x ein Polynom vom Grad k ist, so ist also $\Delta(x)$ ein Polynom vom Grad $k-1$, $\Delta^2(x)$ ein Polynom vom Grad $k-2$ u.s.w. und schließlich $\Delta^k(x)$ ein Polynom vom Grad 0. □

Wir beginnen nun mit den Vorbereitungen zum Beweis von Satz 2.5.

2.3 Lemma. Es sei $x \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ eine Zahlenfolge und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ irgendeine Funktion. Die Folge x erfülle für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung
$$\Delta(x)_n = f(n).$$
Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$
$$x_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) + x_0.$$

Beweis. Dies beweist man mit einer sog. *Teleskopsumme*:
$$\begin{aligned}
x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} f(i) = x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \Delta(x)_i &= x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \Big(\Delta(x)_{i+1} - \Delta(x)_i\Big) \\
&= x_0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta(x)_i - \sum_{i=0}^{n-1} \Delta(x)_i = x_0 + x_n - x_0 = x_n.
\end{aligned}$$
□

2.4 Lemma. Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad k, d.h. es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$
$$f(n) = \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu n^\nu.$$

Dann ist die Funktion $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, welche definiert ist durch

$$F(n) := \sum_{i=0}^{n} f(i)$$

ein Polynom vom Grad $k+1$.

Beweis. Wir zeigen diese Aussage per Induktion nach k.
SCHRITT 1 (Induktionsverankerung $k=0$): Falls $\text{grad}(f) = 0$, so gilt

$$F(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i) = \sum_{i=0}^{n} a_0 = na_0,$$

was sicherlich ein Polynom vom Grad

$$1 = 0 + 1 = k + 1$$

ist.
SCHRITT 2 (Induktionsschluss $k-1 \to k$): Der Induktionsschluss erfolgt wiederum in zwei Schritten.
SCHRITT 2.1 (Hilfspolynom g): Wir definieren zunächst das Hilfspolynom $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ durch

$$g(n) := (n+1)^{k+1} - n^{k-1}$$

Nach dem Binomischen Lehrsatz gilt

$$\begin{aligned} g(n) = (n+1)^{k+1} - n^{k+1} &\overset{2.1}{=} \sum_{\mu=0}^{k+1} \binom{k+1}{\mu} n^{\mu} \cdot 1^{k+1-\mu} - n^{k+1} \\ &= \sum_{\mu=0}^{k} \binom{k+1}{\mu} n^{\mu} + \binom{k+1}{k+1} n^{k+1} - n^{k+1} = \sum_{\mu=0}^{k} \binom{k+1}{\mu} n^{\mu}, \end{aligned}$$

was zeigt, dass g wirklich ein Polynom ist und dass $\text{grad}(g) = k$. Dieses Polynom ist für uns interessant, da sich das Problem für g besonders einfach lösen lässt: Definiert man nämlich $G : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ durch

$$G(n) := \sum_{i=0}^{n} g(i),$$

so erhält man

$$G(n) = \sum_{i=0}^{n} (i+1)^{k+1} - i^{k+1} = (n+1)^{k+1} - 1 \overset{2.1}{=} \sum_{\mu=0}^{k+1} \binom{k+1}{\mu} n^{\mu} - 1,$$

d.h. G ist ein Polynom und $\text{grad}(G) = k+1$.
SCHRITT 2.2 (Anwendung auf allgemeines f): Speziell für das Polynom g haben wir die Aussage nun gezeigt. Für allgemeines f müssen wir nun noch den Induktionsschluss durchführen. Da g ein Polynom vom Grad k ist, können wir es darstellen als

$$g(n) = \sum_{\mu=0}^{k} b_{\mu} n^{\mu},$$

wobei $b_0, \dots, b_k \in \mathbb{R}$ und $b_k \neq 0$. Folglich ist

$$r := \frac{a_k}{b_k}$$

wohldefiniert und ungleich 0. Außerdem ist $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h(n) := f(n) - rg(n) &= \sum_{\mu=0}^{k} (a_\nu - rb_\mu)n^\mu = \sum_{\mu=0}^{k-1} (a_\nu - rb_\mu)n^\mu + (a_k - rb_k)n^k \\ &= \sum_{\mu=0}^{k-1} (a_\nu - rb_\mu)n^\mu \end{aligned}$$

ein Polynom vom Grad $k-1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist daher $H : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,

$$H(n) = \sum_{i=0}^{n} h(i)$$

ein Polynom vom Grad k. Insgesamt gilt daher

$$F(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i) = \sum_{i=0}^{n} \Big(f(i) - rg(i)\Big) + r \sum_{i=0}^{n} g(i) = H(n) + rG(n).$$

Weil H ein Polynom vom Grad k und G ein Polynom vom Grad $k+1$ ist, ist daher F ein Polynom vom Grad $k+1$. □

2.5 Theorem. Es sei $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge. Es gebe ein $k \in \mathbb{N}$ und ein $c \in \mathbb{R}$, sodass

$$\forall n \in \mathbb{N} : \Delta^k(x)_n = c. \tag{2.1}$$

Dann existiert ein Polynom p vom Grad k, sodass

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n = p(n).$$

Beweis. Wir beweisen die folgende Aussage per Induktion nach j:

Für alle $0 \leq j \leq k$ existiert ein Polynom p_j vom Grad j, sodass

$$\forall n \in \mathbb{N} : \Delta^{k-j}(x)_n = p_j(n). \tag{2.2}$$

Für $j = k$ beweist diese Aussage den Satz.

Schritt 1 (Induktionsanfang $j = 0$): Definiere $p_0 := c$. Dann ist p_0 sicherlich ein Polynom vom Grad 0 und es gilt nach Voraussetzung für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\Delta^{k-0}(x)_n \overset{(2.1)}{=} c = p_0(n).$$

Also folgt (2.2) für $j = 0$.

Schritt 2 (Induktionsschluss $j \to j+1$): Wir nehmen an, die Aussage (2.2) gilt für j. Dann erhalten wir nach Definition für alle $n \in \mathbb{N}$

$$p_j(n) = \Delta^{k-j}(x)_n = \Delta(\Delta^{k-j-1}(x))_n = \Delta(\Delta^{k-(j+1)}(x))_n.$$

Wir dürfen also Lemma 2.3 auf die Zahlenfolge $\Delta^{k-(j+1)}(x)$ und die Funktion p_j anwenden und erhalten für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\Delta^{k-(j+1)}(x)_n = \sum_{i=0}^{n-1} p_j(i) + \Delta^{k-(j+1)}(x)_0 =: p_{j+1}(n). \tag{2.3}$$

Gemäß Lemma 2.4 ist p_{j+1} ein Polynom vom Grad $j+1$ in n und $\Delta^{k-(j+1)}(x)_0$ ist ein Polynom vom Grad 0 in n. Daher ist p_{j+1} also wie gewünscht ein Polynom vom Grad $j+1$. □