Analysis IV

Analysis IV 1
1 Holomorphie und Cauchy-Riemann-DGLs 1
1.1 Hilfsmittel aus der Linearen Algebra 1
1.2 Komplexe Differenzierbarkeit 4
1.3 Wirtinger-Kalkül 6
2 Cauchyscher Integralsatz, Integralformel und Potenzreihenentwicklung 8
2.1 Interpretation komplexer Kurvenintegrale 8
3 Nullstellen und Laurent-Entwicklungen 14
4 Folgerungen aus den Integralsätzen 20
5 Folgen holomorpher Funktionen 24
6 Residuensatz 28
7 Mittelwerteigenschaft, Maximumprinzip 36
8 Schwarzsches Lemma / Spiegelungsprinzip 39
9 Komplexer Logarithmus 40
9.1 Polarkoordinaten 40
9.2 Hauptzweig 41

1 Holomorphie und Cauchy-Riemann-DGLs

1.1 Hilfsmittel aus der Linearen Algebra

Def.: Eine Abbildung $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ heißt

additiv :⇔ $\forall x,y\in\mathbb{C}: f(x+y)=f(x)+f(y)$

$\mathbb{R}$ *-homogen* :⇔ $\forall\lambda\in\mathbb{R}:\forall z\in\mathbb{C}: f(\lambda z)=\lambda f(z)$

$\mathbb{C}$-homogen :⇔ $\forall\lambda\in\mathbb{C}:\forall z\in\mathbb{C}: f(\lambda z)=\lambda f(z)$

$\mathbb{C}$-anti-homogen :⇔ $\forall\lambda\in\mathbb{C}:\forall z\in\mathbb{C}: f(\lambda z)=\overline{\lambda} f(z)$

$\mathbb{R}$-linear :⇔ f ist additiv und $\mathbb{R}$-homogen

$\mathbb{C}$-linear :⇔ f ist additiv und $\mathbb{C}$-homogen

$\mathbb{C}$-anti-linear :⇔ f ist additiv und $\mathbb{C}$ anti-homogen

Lemma (Charakterisierung von R und C Linearität): Es sei $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, d.h. $f\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $f(i)=if(1)$.

(ii) Die Abbildung f ist $\mathbb{C}$-linear, d.h. $f\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$.

(iii) Es gibt ein $l\in\mathbb{C}$, sodass für alle $z\in\mathbb{C}$ gilt: $f(z)=lz$. Es ist dann $l=f(1)$.

(iv) Es gibt $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, sodass die Koordinatenmatrix $c_B(f)$ von f aufgefasst Abbildung $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ bzgl. der kanonischen Basis B von der Form $c_B(f)=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist.

Beweis:
(i)$\Rightarrow$(ii): Sei $\lambda,z\in\mathbb{C}$ beliebig und

$$a:=\mathrm{Re}(\lambda),\ b:=\mathrm{Im}(\lambda),\ \xi:=\mathrm{Re}(z),\ \eta:=\mathrm{Im}(z)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} f(\lambda z) &= f(az+ibz)=f(az)+f(ibz)=af(z)+bf\big(i(\xi+i\eta)\big)\\ &=af(z)+bf(i\xi-\eta)=af(z)+b\big(\xi f(i)-\eta f(1)\big)\\ &=af(z)+bi\big(\xi f(1)+i\eta f(1)\big)=af(z)+bi\big(f(\xi)+\eta f(i)\big)\\ &=af(z)+bi\big(f(\xi)+f(i\eta)\big)=af(z)+bif(z)=(a+ib)f(z)=\lambda f(z)\end{aligned}$$

(ii)$\Rightarrow$(iii): Setze $l:=f(1)$, dann gilt n.V.

$$\forall z\in\mathbb{C}: f(z)=f(1z)=f(1)z=lz.$$

(iii)$\Rightarrow$(iv): Sicherlich gibt es eine Koordinatenmatrix

$$c_B(f)=\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$$

von f bzgl. der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^2$. Nach Definition der Koordinatenmatrix und des kanonischen Isomorphismus $\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ ist

$$\alpha=\mathrm{Re}\big(f(1)\big),\ \beta=\mathrm{Im}\big(f(1)\big),\ \gamma=\mathrm{Re}\big(f(i)\big),\ \delta=\mathrm{Im}\big(f(i)\big)$$

Nun ist aber nach (iii) insbesondere: $f(i)=li=if(1)$, d.h.

$$\gamma=\mathrm{Re}\big(f(i)\big)=\mathrm{Re}\big(if(1)\big)=-\mathrm{Im}\big(f(1)\big)=-\beta$$
$$\delta=\mathrm{Im}\big(f(i)\big)=\mathrm{Im}\big(if(1)\big)=\mathrm{Re}\big(f(1)\big)=\alpha$$

(iv)$\Rightarrow$(i):

$$f(i)\mathrel{\hat{=}}\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\mathrel{\hat{=}}if(1)$$

Lemma (Charakterisierung von R Linearität):
(i) Eine Abbildung $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ist genau dann $\mathbb{R}$-linear, wenn es $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ gibt, sodass

$$\forall z\in\mathbb{C}: f(z)=\lambda z+\mu\bar{z}$$

(ii) Es gilt dann

$$\lambda=\tfrac{1}{2}\big(f(1)-if(i)\big),\ \mu=\tfrac{1}{2}\big(f(1)+if(i)\big)$$

d.h. λ,μ sind eindeutig bestimmt.
(iii) Ist f $\mathbb{R}$-linear, dann ist f genau dann $\mathbb{C}$ linear, falls $\mu=0$.

Beweis:
(i) „$\Rightarrow$“: Sei f $\mathbb{R}$-linear. Definiere

$$\lambda:=\tfrac{1}{2}\big(f(1)-if(i)\big),\ \mu:=\tfrac{1}{2}\big(f(1)+if(i)\big)$$

und für $z \in \mathbb{C}$ definiere

$$x := \operatorname{Re}(z)\,,\ \ y := \operatorname{Im}(z)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x+iy) = xf(1) + yf(i) = \frac{z+\overline{z}}{2} f(1) + \frac{z-\overline{z}}{2i} f(i) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(1)z + \frac{1}{i} f(i) z \right) + \frac{1}{2}\left(f(1)\overline{z} - \frac{1}{i} f(i)\overline{z} \right) = \lambda z + \mu \overline{z} \end{aligned}$$

„$\Leftarrow$“: Seien $\alpha \in \mathbb{R}, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, dann gilt aufgrund der Eigenschaften der komplexen Konjugation

$$\begin{aligned} f(z_1 + \alpha z_2) &= \lambda(z_1 + \alpha z_2) + \mu \cdot \overline{z_1 + \alpha z_2} \\ &= \lambda z_1 + \mu \overline{z}_1 + \alpha(\lambda z_2 + \mu \overline{z}_2) = f(z_1) + \alpha \cdot f(z_2) \end{aligned}$$

(ii) Angenommen f ist $\mathbb{R}$-linear und es gibt weitere Zahlen $\lambda', \mu' \in \mathbb{C}$, sodass auch

$$f(z) = \lambda' z + \mu' \overline{z}$$

Dann folgt aber, indem wir das insbesondere für $f(1) = \lambda' + \mu'$ und $f(i) = \lambda' i - \mu' i$ einsetzen:

$$\begin{aligned} \lambda &= \tfrac{1}{2}\left(f(1) - if(i) \right) = \tfrac{1}{2}\left((\lambda' + \mu') - i(\lambda' i - \mu' i) \right) = \tfrac{1}{2}(\lambda' + \lambda' + \mu' - \mu') = \lambda' \\ \mu &= \tfrac{1}{2}\left(f(1) + if(i) \right) = \tfrac{1}{2}\left((\lambda' + \mu') + i(\lambda' i - \mu' i) \right) = \tfrac{1}{2}(\lambda' - \lambda' + \mu' + \mu') = \mu' \end{aligned}$$

(iii) folgt aus dem vorangegangenen Lemma über Charakterisierung von $\mathbb{C}$-Linearität.

Corollar: Bezeichnet man mit $\overline{\operatorname{End}}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ die Menge aller komplex anti-linearen Endomorphismen, dann besagt obiges Lemma, dass

$$\operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \oplus \overline{\operatorname{End}}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$$

Das lässt sich übrigens verallgemeinern:

Satz: Seien V, W $\mathbb{C}$-Vektorräume (und damit auch $\mathbb{R}$-Vektorräume). Sei

$$T \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$$

dann existiert genau ein $\lambda \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ und genau ein $\mu \in \overline{\operatorname{Hom}}_{\mathbb{C}}(V, W)$, sodass

$$T = \lambda + \mu$$

Es gilt also:

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W) \oplus \overline{\operatorname{Hom}}_{\mathbb{C}}(V, W)$$

Beweis: Definiere

$$\lambda(z) := \frac{1}{2}\left(T(z) - iT(iz) \right),\ \ \mu(z) := \frac{1}{2}\left(T(z) + iT(iz) \right)$$

Dann gilt für alle $\xi \in \mathbb{C}$

$$\lambda(\xi z)=\frac{1}{2}\left(T(\xi z)-iT(i\xi z)\right)=\frac{1}{2}\left(T\left((\xi_1+i\xi_2)z\right)-iT\left(i(\xi_1+i\xi_2)z\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\xi_1 T(z)+\xi_2 T(iz)-i\xi_1 T(iz)+i\xi_2 T(z)\right)=\frac{1}{2}\left((\xi_1+i\xi_2)T(z)-i(\xi_1+i\xi_2)T(iz)\right)$$
$$=(\xi_1+i\xi_2)\frac{1}{2}\left(T(z)-iT(iz)\right)=\xi\lambda(z)$$

Also ist λ $\mathbb{C}$-linear. Analog gilt

$$\mu(\xi z)=\frac{1}{2}\left(T(\xi z)+iT(i\xi z)\right)=\frac{1}{2}\left(T\left((\xi_1+i\xi_2)z\right)+iT\left(i(\xi_1+i\xi_2)z\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\xi_1 T(z)+\xi_2 T(iz)+i\xi_1 T(iz)-i\xi_2 T(z)\right)=\frac{1}{2}\left((\xi_1-i\xi_2)T(z)+(\xi_2+i\xi_1)T(iz)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left((\xi_1-i\xi_2)T(z)+(\xi_1-i\xi_2)iT(iz)\right)=(\xi_1-i\xi_2)\frac{1}{2}\left(T(z)+iT(iz)\right)$$
$$=\bar{\xi}\mu(z)$$

also ist μ $\mathbb{C}$-antilinear. Außerdem gilt

$$\lambda(z)+\mu(z)=\frac{1}{2}\left(T(z)+iT(iz)\right)+\frac{1}{2}\left(T(z)-iT(iz)\right)$$
$$=\frac{1}{2}T(z)+\frac{i}{2}T(iz)+\frac{1}{2}T(z)-\frac{i}{2}T(iz)=T(z)$$

Also ist $T=\lambda+\mu$. Angenommen es wäre nun auch $T=\lambda'+\mu'$ eine solche Zerlegung. Dann ist

$$\lambda(z)=\frac{1}{2}\left(\lambda'(z)+\mu'(z)-i\lambda'(iz)-i\mu'(iz)\right)=\lambda'(z)$$
$$\mu(z)=\frac{1}{2}\left(T(z)+iT(iz)\right)=\frac{1}{2}\left(\lambda'(z)+\mu'(z)+i\lambda'(iz)+i\mu'(iz)\right)=\mu'(z)$$

1.2 Komplexe Differenzierbarkeit

Definition ($\mathbb{C}$-Differenzierbarkeit): Es sei $U\subset\mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f:U\to\mathbb{C}$ heißt *komplex differenzierbar in* $a\in U$, falls der Grenzwert

$$f'(a):=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

existiert.

Definition (Holomorphie): Eine Funktion $f:U\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ heißt *holomorph in* U, falls f in jedem Punkt $a\in U$ komplex differenzierbar ist. Wir bezeichnen mit

$$\mathrm{Hol}(U):=\left\{f:U\to\mathbb{C}\mid f \text{ ist holomorph auf } U\right\}$$

Lemma: Eine Funktion $f:U\to\mathbb{C}$ ist genau dann in $a\in U$ komplex differenzierbar, wenn es eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $A:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ und ein $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ gibt, sodass

$$f(a+h)=f(a)+Ah+\varphi(h) \text{ mit } \lim_{h\to\infty}\frac{\varphi(h)}{h}=0.$$

Beweis:
„$\Rightarrow$": Es sei f in a komplex differenzierbar. Wir definieren die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $A:=f'(a)$ und $\varphi(h):=f(x+h)-f(a)-Ah$. Dann gilt:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)=0$$

„$\Leftarrow$": Es gelte andersherum $f(a+h)=f(a)+Ah+\varphi(h)$ mit den angegebenen Bedingungen für A und φ. Dann ist

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=A+\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h)}{h}=A$$

Satz: Es sei $f:U\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $a\in U$. Man fasse Ω als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ auf und interpretiere somit $f:U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$. Man zerlege f in $u:=\mathrm{Re}(f)$ und $v:=\mathrm{Im}(f)$, sodass also $f=u+iv$ und ferner $a=\xi+i\eta$. Dann gilt:

(i) $f'(a)=u_x(\xi,\eta)+iv_x(\xi,\eta)\triangleq f_x(a)\triangleq u_y(\xi,\eta)+iv_y(\xi,\eta)\triangleq f_y(a)$

(ii) Die Funktionen u,v sind total $\mathbb{R}$-differenzierbar und es gilt: $u_x(a)=v_y(a)$ und $u_y(a)=-v_x(a)$

(iii) f ist total $\mathbb{R}$-differenzierbar und es gilt: $f_x(a)=-if_y(a)$

Beweis:

Komplexe Differenzierbarkeit bedeutet, dass

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a+h_n)-f(a)}{h_n}$$

existiert und zwar für jede Folge komplexer Zahlen $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty}h_n=0$, $h_n\neq 0$. Die Differenzierbarkeitsaussagen folgen damit sofort, indem man rein reelle bzw. rein imaginäre Folgen wählt. Wir wählen speziell ein $h_n\in\mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}f'(a)&=\lim_{n\to\infty}\frac{f(a+h_n)-f(a)}{h_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{u(\xi+h_n,\eta)-u(\xi,\eta)}{h_n}+i\frac{v(\xi+h_n,\eta)-v(\xi,\eta)}{h_n}\\&=u_x(a)+iv_x(a)\triangleq f_x(a)\end{aligned}$$

Außerdem für speziell ih_n:

$$\begin{aligned}f'(a)&=\lim_{n\to\infty}\frac{f(a+ih_n)-f(a)}{ih_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{u(\alpha,\beta+h_n)-u(\alpha,\beta)}{ih_n}+i\frac{v(\alpha,\beta+h_n)-v(\alpha,\beta)}{ih_n}\\&=\frac{1}{i}u_y(a)+v_y(a)=-iu_y(a)+v_y(a)\end{aligned}$$

Es folgt:

$$u_x(a)+iv_x(a)=-iu_y(a)+v_y(a)\Leftrightarrow u_x(a)=v_y(a)\wedge -u_y(a)=v_x(a)$$

Damit ist

$$f_x(a)=u_x(a)+iv_x(a)=v_y(a)-iu_y(a)=-i\big(u_y(a)+iv_y(a)\big)=-if_y(a)$$

Definition: Es sei $f:U\to\mathbb{C}$ in $a\in U$ reell differenzierbar. Dann heißen die Gleichungen

$$u_x(a)=v_y(a),\ -u_y(a)=v_x(a)$$

Cauchy-Riemannsche-Differentialgleichungen.

Satz (Charakterisierung komplexer Differenzierbarkeit): Es sei $f:U\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ eine Funktion $f=u+iv$ und $a\in U$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

(i) f ist in a komplex differenzierbar

(ii) Es gibt eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung A, sodass $f(a+h)-f(a)-Ah\in o(h)$

(iii) f ist in a reell total differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Beweis:
Die Richtungen (i)$\Leftrightarrow$(ii) und (i)$\Rightarrow$(iii) wurden schon gezeigt. Wir zeigen daher nur noch (iii)$\Rightarrow$(ii):
Fassen wir erneut f auf als $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, so folgt mit den Cauchy-Riemann-DGL und $z=\xi+i\eta$ für das totale $\mathbb{R}$-Differential von f:

$$f(z)\triangleq f(\xi,\eta)\begin{pmatrix}u(\xi,\eta)\\ v(\xi,\eta)\end{pmatrix}\Rightarrow Df(\xi,\eta)=\begin{pmatrix}u_x(\xi,\eta) & u_y(\xi,\eta)\\ v_x(\xi,\eta) & v_y(\xi,\eta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_x(\xi,\eta) & -v_x(\xi,\eta)\\ v_x(\xi,\eta) & u_x(\xi,\eta)\end{pmatrix}.$$

Nach obigen Lemmata ist $Df(\xi,\eta)$ eine $\mathbb{C}$ lineare Abbildung.

1.3 Wirtinger-Kalkül

Def. (Differentialoperatoren): Es sei $f:U\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ differenzierbar. Zerlege $a=\xi+i\eta$ und $f=u+iv$. Dann fassen wir f auf als Abbildung $U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$$(\xi,\eta)\mapsto\big(u(\xi,\eta),v(\xi,\eta)\big)^T$$

Dann gilt für die reelle Jacobi-Matrix von f

$$\nabla f(\xi,\eta)=\begin{pmatrix}\partial_x u & \partial_y u\\ \partial_x v & \partial_y v\end{pmatrix}(\xi,\eta)$$

Wir bezeichnen mit

$$\partial_x f(a):=\partial_x f(\xi,\eta):=\big(\partial_x u(\xi,\eta),\partial_x v(\xi,\eta)\big)\triangleq\partial_x u(\xi,\eta)+i\partial_x v(\xi,\eta)$$

$$\partial_y f(a):=\partial_y f(\xi,\eta):=\big(\partial_y u(\xi,\eta),\partial_y v(\xi,\eta)\big)\triangleq\partial_y u(\xi,\eta)+i\partial_y v(\xi,\eta)$$

die normalen Richtungsableitungen von f bei z unter dem kanonischen Isomorphismus $\mathbb{R}^2\cong\mathbb{C}$. Ferner heißt

$$\partial_z f(z):=\frac{1}{2}\big(\partial_x f(z)-i\partial_y f(z)\big)$$

komplexe Ableitung und

$$\overline{\partial}_z f(z) := \frac{1}{2}\left(\partial_x f(z) + i\partial_y f(z)\right)$$

Dolbeault-Operator. Die Werte $\partial_z f(a)$ und $\overline{\partial}_z f(a)$ heißen auch die *Wirtinger-Ableitungen* von f.

Bem: Wendet man obige Sätze und Lemmata an, so erhält man sofort, dass gilt

(i) f in a komplex differenzierbar $\Rightarrow$ $f'(a) = \partial_z f(a)$

(ii) f ist in a komplex differenzierbar $\Leftrightarrow$ $\overline{\partial}_z f(a) = 0$

Bem.: Man kann die Wirtinger-Ableitungen als Operatoren $\partial, \overline{\partial} : C^1(U) \to C^0(U)$ auffassen. Dann ist also

$$\ker \overline{\partial} = Hol(U)$$

Man bezeichnet umgekert eine Funktion $f \in C^1(U)$ auch als *anti-holomorph*, falls

$$f \in \ker \partial$$

Satz (Rechenregeln): Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f, g : U \to \mathbb{C}$ differenzierbar in $a \in U$, dann sind auch

$$\overline{f}, f \cdot g, f + g$$

sowie für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ auch λf differenzierbar in a und es gilt

(i) $\partial_z \overline{f}(a) = \overline{\overline{\partial}_z f(a)}$, $\overline{\partial}_z f(a) = \overline{\overline{\partial}_z f(a)}$

(ii) $\partial_z (f \cdot g)(a) = \partial_z f(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot \partial_z g(a)$

(iii) $\overline{\partial}_z (f \cdot g)(a) = \overline{\partial}_z f(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot \overline{\partial}_z g(a)$

(iv) $\partial_z (f + g)(a) = \partial_z f(a) + \partial_z g(a)$

(v) $\overline{\partial}_z (f + g)(a) = \overline{\partial}_z f(a) + \overline{\partial}_z g(a)$

2 Cauchyscher Integralsatz, Integralformel und Potenzreihenentwicklung

2.1 Interpretation komplexer Kurvenintegrale

Def. (rot): Für ein Vektorfeld $f \in C^1\left(U, \mathbb{R}^2\right)$, $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, heißt $\operatorname{rot} f : U \to \mathbb{R}$

$$\operatorname{rot} f := \partial_2 f_1 - \partial_1 f_2$$

Rotation von f.

Def. (Senkrecht): Für einen Vektor $a \in \mathbb{R}^2$ definieren wir

$$a^\perp := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^\perp := \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Satz: Ist $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine Kurve und $f \in C^0(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, so bezeichnen wir mit

$$\int_\gamma^{\mathbb{C}} f = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\dot{\gamma}(t)\,dt$$

das komplexe Kurvenintegral über f, aufgefasst als Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, und mit

$$\int_{\gamma,\dot{\gamma}}^{\mathbb{R}} f = \int_0^1 \left\langle f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \right\rangle dt\,,\ \int_{\gamma,\dot{\gamma}^\perp}^{\mathbb{R}} f = \int_0^1 \left\langle f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)^\perp \right\rangle dt$$

das reelle tangentiale und normale Kurvenintegral über f aufgefasst als Vektorfeld $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\int_\gamma^{\mathbb{C}} \overline{f} = \int_{\gamma,\dot{\gamma}}^{\mathbb{R}} f - i \int_{\gamma,\dot{\gamma}^\perp}^{\mathbb{R}} f$$

Beweis:

$$\int_\gamma^{\mathbb{C}} \overline{f} = \int_0^1 \overline{f(\gamma(t))} \cdot \dot{\gamma}(t)\,dt = \int_0^1 \Big(\operatorname{Re}\big(f(\gamma(t))\big) - i \operatorname{Im}\big(f(\gamma(t))\big)\Big) \cdot \Big(\operatorname{Re}\big(\dot{\gamma}(t)\big) + i \operatorname{Im}\big(\dot{\gamma}(t)\big)\Big)\,dt$$

$$= \int_0^1 \Big(\operatorname{Re}\big(f(\gamma(t))\big)\operatorname{Re}\big(\dot{\gamma}(t)\big) + \operatorname{Im}\big(f(\gamma(t))\big)\operatorname{Im}\big(\dot{\gamma}(t)\big)\Big)\,dt$$

$$+ i \int_0^1 \Big(\operatorname{Re}\big(f(\gamma(t))\big)\operatorname{Im}\big(\dot{\gamma}(t)\big) - \operatorname{Im}\big(f(\gamma(t))\big)\operatorname{Re}\big(\dot{\gamma}(t)\big)\Big)\,dt$$

$$= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\big(f(\gamma(t))\big) \\ \operatorname{Im}\big(f(\gamma(t))\big) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\big(\dot{\gamma}(t)\big) \\ \operatorname{Im}\big(\dot{\gamma}(t)\big) \end{pmatrix} \right\rangle dt + i \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\big(f(\gamma(t))\big) \\ \operatorname{Im}\big(f(\gamma(t))\big) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \operatorname{Im}\big(\dot{\gamma}(t)\big) \\ -\operatorname{Re}\big(\dot{\gamma}(t)\big) \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_0^1 \left\langle f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \right\rangle dt - i \int_0^1 \left\langle f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)^\perp \right\rangle dt$$

$$= \int_{\gamma,\dot{\gamma}}^{\mathbb{R}} f - i \int_{\gamma,\gamma^\perp}^{\mathbb{R}} f$$

Definition: Eine *Kurve* ist eine stetige Abbildung $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ mit $a<b$, $[a,b]\subset\mathbb{R}$.

Lemma von Goursat: Es sei $K\subset\mathbb{C}$ offen und konvex, es sei $f\in\operatorname{Hol}(K)$. Dann gilt für jedes Dreieck $\Delta\subset K$:

$$\int_{\partial\Delta} f dz = 0$$

Beweis: Sind a,b,c die Ecken des Dreiecks, so meint Integration über $\partial\Delta$, die Integration über die Kurven $[a,b],[b,c],[c,a]$. Bei Änderung der Reihenfolge um die Ecken, ändert sich das Integral über $\partial\Delta$ lediglich um den Faktor -1.
Wir zerlegen das Dreieck in vier kongruente Teildreiecke, indem wir jeweils alle Mittelpunkte verbinden. Davon wählen wir ein Dreieck Δ_1 aus, sodass

$$\left|\int_{\partial\Delta_1} fdz\right| \geq \left|\int_{\partial\Delta_i} fdz\right|,\ i=1,2,3.$$

Dann ist sicherlich

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| \leq 4\cdot\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)dz\right|$$

Wir zerlegen nun erneut Δ_1 genauso in vier kongruente Teildreiecke, wählen wieder dasjenige, mit dem betragsmäßig größten Kurvenintegral aus u.s.w. und erhalten so eine absteigende Folge $\Delta_1\supset\Delta_2\supset\ldots$ von Dreiecken Δ_n. Dann gilt:

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| \leq 4^n\cdot\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right|$$

Es sei nun $\forall n\in\mathbb{N}: z_0\in\Delta_n$. Da $f\in\operatorname{Hol}(K)$, gilt:

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+|z-z_0|r(z),$$

wobei $r:K\to\mathbb{C}$ eine Funktion ist, mit $\lim\limits_{z\to z_0} r(z)=0$. Die affin-lineare Funktion $f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)$ besitzt eine Stammfunktion, folglich verschwindet das Kurvenintegral darüber und es ist

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_n} |z-z_0|r(z)dz$$

Es sei L der Umfang des Dreiecks Δ, dann ist $2^{-n}L$ der Umfang von Δ_n. Da $z_0\in\Delta_n$, gilt außerdem $|z-z_0|\leq 2^{-n}L$. Folglich erhalten wir insgesamt:

$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)dz\right| \leq 4^n\cdot\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right| \leq 4^n\cdot 2^{-n}L\cdot 2^{-n}L\left|\int_{\partial\Delta_n} r(z)dz\right| \leq L^2\cdot\max_{z\in\Delta_n}|r(z)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Satz vom Integralkriterium: Es sei $K\subset\mathbb{C}$ offen, konvex und f eine stetige Funktion, sodass für jedes Dreieck $\Delta\subset K$ gilt:

$$\int_{\partial\Delta} f(\xi)d\xi = 0 \quad \text{(I)}$$

Dann besitzt f in K eine holomorphe Stammfunktion, d.h. eine Funktion F mit $F' = f$. Für beliebig aber fest gewähltes $a \in K$ erhält man eine solche durch Integration längs der Strecken $[a, z]$, $z \in K$ durch:

$$F(z) := \int_{[a,z]} f(\xi)\, d\xi$$

Beweis: Es sei $z \in K$ und $h \in \mathbb{C}$ betragsmäßig so klein gewählt, dass $z + h \in K$. Es sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) : z + th$ eine Parametrisierung der Kurve $[z, z+h]$. Wegen (I) gilt dann:

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} f(z) dz = \frac{1}{h} \int_0^1 f(\gamma(t))\, \dot{\gamma}(t)\, dt = \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th)\, h dt$$

$$= \int_0^1 f(z+th)\, dt \overset{(1)}{=} \mu([0,1]) \cdot f(z + \vartheta h) \xrightarrow{h \to 0} f(z)$$

(1) Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein solches $\vartheta \in [0,1]$. Aus der Stetigkeit von f folgt die Aussage über den Grenzwert.

Cauchyscher Integralsatz: Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend. Es sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Es sei $\Gamma \subset \Omega$ eine geschlossene Kurve. Dann gilt:

$$\int_\Gamma f dz = 0$$

Beweis: Aus $f \in \operatorname{Hol}(\Omega)$ folgt nach dem Lemma von Goursat, dass das Kurvenintegral über jeden Dreiecksrand verschwindet. Daraus folgt mit dem Stammfunktionslemma, dass f für jeden beliebigen Punkt $a \in \Omega$ in einer Umgebung dieses Punktes eine Stammfunktion besitzt. Die Geschlossenheit von Γ bedeutet, da das Gebiet einfach zusammenhängend ist, dass Γ nullhomotop ist. Daraus folgt die Behauptung.

Lemma: Es gilt für jedes $\varepsilon > 0$ und $m \in \mathbb{Z}$:

(i) $\int_{\partial B_\varepsilon(0)} z^m dz = 0$, falls $m \neq -1$

(ii) $\int_{\partial B_\varepsilon(0)} z^{-1} dz = 2\pi i$, falls $m = -1$

Beweis:
Es sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ eine Parametrisierung $\gamma(t) := \varepsilon e^{it}$ von $\partial B_\varepsilon(0)$. Dann gilt für $m \neq -1$

$$\int_{\partial B_\varepsilon(0)} z^m dz = \int_0^{2\pi} \left(\varepsilon e^{it}\right)^m \varepsilon i e^{it} dt = \varepsilon^2 i \int_0^{2\pi} e^{mit+it} dt = \frac{\varepsilon^2}{(m+1)} \left[e^{(m+1)it} \right]_0^{2\pi} = -\frac{\varepsilon^2}{(m+1)} \left(e^{2i\pi(m+1)} - e^0 \right) = 0$$

, und für $m = -1$:

$$\int_{\partial B_\varepsilon(0)} z^{-1} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon e^{it}} \varepsilon i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i$$

Cauchysche Integralformel: Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ nicht-leer offen und $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$. Es sei $\overline{K}_R(a) \subset \Omega$ eine geschlossene Kurve in Ω. Dann gilt für $z_0 \in K_R(a)$, dass

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{K_R(a)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Beweis: Aus der Holomorphie von f folgt die Beschränktheit des Differenzenquotienten:

$$\left| \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \right| \leq M$$

Für irgendein $B_\varepsilon(z) \subset \overline{K}_R(a)$ mit beliebigem $\varepsilon > 0$ gilt mit obigem Lemma:

$$\int_{\partial K_R(a)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\xi) - f(z) + f(z)}{\xi - z} d\xi$$

$$= \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi + f(z) \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{1}{\xi - z} d\xi = \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi + f(z) 2\pi i$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung.

Wir erhalten als unmittelbare Konsequenz eine Special Ability holomorpher Funktionen:

Satz: Holomorphe Funktionen sind unendlich oft differenzierbar:

$$f \in \mathrm{Hol}(\Omega) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : f^{(k)} \in \mathrm{Hol}(\Omega)$$

Außerdem gelten für die Ableitungen die Darstellung:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2i\pi} \int_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi$$

Beweis:
Die Funktion f sei in $z \in \Omega$ komplex differenzierbar. Dann gilt nach der Cauchyschen Integralformel:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{B_\varepsilon(z)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

$$\Rightarrow \frac{d^k f(z)}{dz^k} = \frac{1}{2i\pi} \frac{d^k}{dz^k} \int_{B_\varepsilon(z)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2i\pi} \int_{B_\varepsilon(z)} f(\xi) \cdot \frac{d^k}{dz^k} (\xi - z)^{-1} d\xi = \frac{k!}{2i\pi} \int_{B_\varepsilon(z)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi$$

Damit erhalten wir sofort eine Umkehrung des Lemmas von Goursat:

Satz von Morera: Eine stetige Funktion $f : K \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Kreisscheibe $K \subset \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn für jedes Dreieck $\Delta \subset K$ gilt:

$$\int_\Delta f(z) dz = 0$$

Beweis:

„$\Rightarrow$“: Lemma von Goursat
„$\Leftarrow$“: Aus dem Integralkriterium folgt, dass f eine holomorphe Stammfunktion F mit $F' = f$ besitzt. Folglich ist auch die Ableitung f holomorph.

Satz: Sei $f:\Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Dann gilt für jeden Punkt $z_0 \in \Omega$:

$$\exists a_j \in \mathbb{C} : \exists \varepsilon > 0 : \forall z \in U_\varepsilon(z_0) : f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Die Koeffizienten a_k können explizit berechnet werden durch:

$$a_k = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(y)}{(y - z_0)^{k+1}} dy = f^{(k)}(z_0)/k!, \text{ wobei } \Gamma = B_R(z_0) \subset \Omega$$

Beweis: Es sei $z_0 \in \Omega$. Dann gibt es wegen der Offenheit von Ω ein $R > 0$, sodass $\Gamma := \partial B_R(z_0) \subset \Omega$. Dann gilt nach der Cauchyschen Integralformel:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 + z_0 - z} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} d\zeta$$

Da $\zeta \in \partial B_R(z_0) \Rightarrow |\zeta - z_0| = R$. Also gilt $\forall z \in \partial \mathring{B}_R(z_0) : |z - z_0| < R$. Es sei nun $r < R$ beliebig. Dann gilt: $\forall z \in B_r(z_0) : \left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| =: \delta < 1$. Es gilt nach der geometrischen Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{y - z_0}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{y - z_0}}$$

und da wir durch δ unabhängig von z majorisieren können, konvergiert die Reihe gleichmäßig auf $B_r(z_0)$. Folglich dürfen Integration und Summation vertauscht werden und es gilt:

$$\forall z \in B_r(z_0) : f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^k d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^k} d\zeta \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right)}_{=:a_k} (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Satz (deLospital-Analogon): Es seien $f, g \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ und es sei $a \in \Omega$ eine isolierte Nullstelle von g der Ordnung n und eine isolierte Nullstelle von f von Ordnung mindestens n, d.h. es gelte:

$$\forall 0 \le k \le n-1 : g^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) = 0 \text{ und } g^{(n)}(a) \ne 0$$

Dann gilt:

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

Beweis: Aus der Holomorphie und der Forderung nach Isoliertheit der Nullstelle a folgt, dass es eine Umgebung $U_\varepsilon(a)$ gibt, in der beide Funktionen eine Potenzreihendarstellung

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(z-a)^k \text{ und } g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k(z-a)^k$$

besitzen. Da diese identisch mit der Taylorreihe sein muss, gilt wie üblich:

$$\forall k\in\mathbb{N}:\alpha_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!},\beta_k=\frac{g^{(k)}(a)}{k!}$$

Nach Voraussetzung ist $\alpha_0=\ldots=\alpha_{n-1}=0$, $\beta_0=\ldots=\beta_{n-1}=0$ und $\beta_n\neq 0$. Also:

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to a}\frac{\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(z-a)^k}{\sum_{k=n}^{\infty}\beta_k(z-a)^k}=\lim_{z\to a}\frac{(z-a)^n\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{k+n}(z-a)^k}{(z-a)^n\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{k+n}(z-a)^k}=\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\lim_{z\to a}\alpha_{k+n}(z-a)^k}{\sum_{k=0}^{\infty}\lim_{z\to a}\beta_{k+n}(z-a)^k}$$

$$=\frac{\alpha_n/n!}{\beta_n/n!}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

Cauchysche Ungleichungen:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \quad f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial B_R(z)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta$$

$$\left|f^{(n)}(z)\right|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial B_R(z)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\right|\leq\frac{n!}{2\pi}\cdot\left|\partial B_R(z)\right|\cdot\sup_{\xi\in\partial B_R(z)}\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\right| \text{t}$$

$$=\frac{n!}{2\pi}\cdot 2\pi R\cdot\frac{1}{R^{n+1}}\sup_{\xi\in\partial B_R(z)}\left|f(\zeta)\right|=\frac{n!}{R^n}\max_{\xi\in\partial B_R(z)}\left|f(\zeta)\right|=\frac{n!}{R^n}\cdot M$$

Satz (Mittelwertformel): Es sei $f\in\mathrm{Hol}(\Omega), z\in\Omega$ und $r>0$, sodass $B_r(z)\subset\Omega$. Dann gilt

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(z+re^{it}\right)dt$$

Beweis: Die Cauchysche Integralformel gilt insbesondere auch für $z=a$ und den Kreis mit der Parametrisierung $\varphi:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ mit $\varphi(t):=z+re^{it}$. Damit erhalten wir

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(\varphi(t))}{\varphi(t)-z}\dot{\varphi}(t)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(z+re^{it}\right)}{z+re^{it}-z}ire^{it}dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(z+re^{it}\right)dt$$

3 Nullstellen und Laurent-Entwicklungen

Definition: Es sei $f: U \subset \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Ein $a \in U$ heiß k*-fache Nullstelle von* f, falls gilt: $\forall 0 \le j \le k-1: f^{(j)}(a) = 0$.

Lemma: Es sei $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ und $a \in \Omega$ k-fache Nullstelle von f. Dann existiert eine Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Beweis: Die Koeffizienten sind ja gerade $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{k!}$ und folglich Null für $n = 0, \ldots, k-1$.

Definition: Eine Funktion $f: \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$, $f \in \mathrm{Hol}(\Omega \setminus \{a\})$, heißt *holomorph fortsetzbar,* falls es eine Funktion $F \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ gibt, mit $F|_{\Omega \setminus \{a\}} = f$. Die Funktion F heißt *holomorphe Fortsetzung von* f *in* a.

Riemannscher Hebbarkeitssatz: Ist $f \in \mathrm{Hol}(\Omega \setminus \{a\})$ und f beschränkt in $U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$, dann existiert eine holomorphe Fortsetzung von f in a.

Beweis:
Wir definieren die Funktion $\varphi: \Omega \to \mathbb{C}$ durch

$$\varphi(z) := \begin{cases} 0 & \text{,falls } z = a \\ (z-a)^2 f(z) & \text{,falls } z \neq a \end{cases}$$

Die Funktion φ ist auf ganz Ω holomorph, denn aus der lokalen Beschränktheit von f folgt:

$$\lim_{z \to a} \frac{\varphi(z) - \varphi(a)}{z-a} = \lim_{z \to a} \frac{(z-a)^2 f(z)}{z-a} = \lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 0 = \varphi'(a)$$

Also hat φ eine zweifache Nullstelle in a und somit eine Potenzreihenentwicklung $\varphi(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-a)^n$. Folglich ist

$$(z-a)^{-2} \varphi(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-a)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (z-a)^n =: F(z)$$

die gesuchte Fortsetzung.

Corollar: Es sei $f \in \mathrm{Hol}(\Omega \setminus \{a\})$, und es sei f in a definiert und stetig. Dann gilt: $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$.

Beweis: Ist f in a definiert und stetig, so ist f in einer Umgebung von a beschränkt und besitzt dort eine holomorphe Fortsetzung F. Diese Fortsetzung ist jedoch eindeutig bestimmt. Da Holomorphie Stetigkeit impliziert, gilt $F = f$.

Definition: Ein *Kreisring* mit *innerem Radius* $r \geq 0$ und *äußerem Radius* $R \leq \infty$ mit *Mittelpunkt* a ist die Punktmenge

$$K_{r,R}(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R\}$$

Speziell $K_R^*(a) := K_{0,R}$ heißt *punktierte Kreisscheibe um* a.

Satz (Integralformel für Kreisringe): Es sei $f \in \mathrm{Hol}(U)$ und es sei $\overline{K}_{r,R}(a) \subset U$. Dann gilt

$$\forall z \in K_{r,R}(a): f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\right)$$

Beweis: Es sei $z \in K_{r,R}(a)$. Wir definieren

$$\phi(\zeta) := \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \text{ für } \zeta \neq z \text{ und } \phi(\zeta) := f'(z)$$

Dann ist $\phi \in \mathrm{Hol}(U \setminus \{z\})$ und in z definiert und stetig. Nach dem Corollar zum Riemannschen Hebbarkeitssatz folgt $\phi \in \mathrm{Hol}(U)$. Die Kreise $\partial B_R(a)$ und $\partial B_r(a)$ sind in $\overline{K}_{r,R}(a)$ frei homotop und folglich gilt:

$$\int_{\partial B_R(a)} \phi(z)dz = \int_{\partial B_r(a)} \phi(z)dz \quad (*)$$

Es ist einerseits:

$$\int_{\partial B_R(a)} \phi(\zeta)d\zeta = \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\partial B_R(a)} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

$$= \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) 2\pi i$$

Da $z \notin B_r(a)$ gilt wegen des Cauchyschen Integralsatzes andererseits:

$$\int_{\partial B_r(a)} \phi(\zeta)d\zeta = \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\partial B_r(a)} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Setzt man beides in $(*)$ ein, so erhält man:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Definition (Laurent-Reihe): Eine *Laurent-Reihe* ist eine Reihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n :\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

Man bezeichnet $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}$ als *Hauptteil,* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ als *Nebenteil.* Eine Laurent-Reihe heißt *konvergent*, falls sowohl Haupt- also auch Nebenteil konvergent sind.

Satz (Konvergenzradien von Laurent-Reihen): Es sei ρ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^n$ und R der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$. Dann ist die Laurent-Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$

- konvergent für alle z mit $r:\frac{1}{\rho}<|z-a|<R$
- divergent für alle z mit $|z-a|<r$ oder $|z-a|>R$

Beweis: Folgt direkt aus der Definition der Laurent-Reihe.

Lemma: Es sei $f(z):=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ eine auf $K_{r,R}(a)$ konvergente Laurent-Reihe mit $a_{-1}=0$. Dann besitzt f in $K_{r,R}(a)$ eine Stammfunktion.

Beweis: Potenzreihen dürfen innerhalb ihres Konvergenzbereichs gliedweise differenziert und integriert werden. Folglich existiert die Stammfunktion F:

$$F(z)=\sum_{n=-\infty,n\neq-1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$$

Satz (Integralformel für Laurentkoeffizienten): Konvergiert die Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ im Kreisring $K_{r,R}(a)$ gegen f, so gilt

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta \quad \text{(L)}$$

für $r<\rho<R$. Jede holomorphe Funktion besitzt in einem Kreisring also höchstens eine Laurent-Entwicklung.

Beweis: Nach obigem Lemma besitzt die Funktion

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}-\frac{a_n}{z-a}=\frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-a)^k}{(z-a)^{n+1}}-\frac{a_n}{z-a}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-a)^{k-n-1}-\frac{a_n}{z-a}$$

eine Stammfunktion und folglich gilt für das Kurvenintegral:

$$\int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}-\frac{a_n}{\zeta-a}d\zeta=0\Rightarrow\int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta=a_n\int_{\partial B_\rho(a)} \frac{1}{\zeta-a}d\zeta=a_n 2\pi i$$

Damit sind die Koeffizienten eindeutig bestimmt.

Satz (Laurent-Entwicklung): Jede in einem Kreisring $K_{r,R}(a)$ holomorphe Funktion besitzt in diesem genau eine Laurent-Entwicklung. Die Koeffizienten sind für beliebiges $r<\rho<R$ durch (L) gegeben.

Beweis: Besitzt f überhaupt eine Entwicklung in eine konvergente Laurent-Reihe, so ist diese nach obigem Satz eindeutig bestimmt. Es genügt daher zu zeigen, dass f in jedem kleineren Kreisring $K_{r',R'}(a)$ mit $r<r'<\rho<R'<R$ eine solche

Entwicklung besitzt: Nach dem Satz über die Integralformel für einen Kreisring besitzt f immerhin eine Darstellung

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_{R'}(a)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_{r'}(a)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

Mittels geometrischer Reihe erhält man für den Integrand über $\partial B_{R'}(a)$:

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-a+a-z}=\frac{1}{\zeta-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}=\frac{1}{\zeta-a}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^k \text{ für } |z-a|<R',\ |\zeta-a|=R'$$

und für $\partial B_{r'}(a)$:

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-a+a-z}=\frac{1}{z-a}\cdot\frac{-1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}}=\frac{-1}{z-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^k \text{, für } |z-a|>r',\ |\zeta-a|=r'$$

Diese Reihen konvergieren beide gleichzeitig und gleichmäßig falls $r'<|z-a|<R'$, da sie durch ein $q<1$ majorisiert sind. Folglich dürfen Integration und Summation vertauscht werden und wir erhalten die Laurent-Entwicklung:

$$\begin{aligned}
f(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_{R'}(a)}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^k\right)d\zeta-\frac{f(\zeta)}{2\pi i}\int_{\partial B_{r'}(a)}\left(\frac{-1}{z-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^k\right)d\zeta\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_{R'}(a)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}d\zeta\,(z-a)^k+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_{r'}(a)}f(\zeta)\cdot(\zeta-a)^k\,d\zeta\,(z-a)^{-k-1}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_{R'}(a)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}d\zeta}_{=a_k}(z-a)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_{r'}(a)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}d\zeta}_{=a_{-k}}(z-a)^{-k}
\end{aligned}$$

Definition (Singularität): Ist $f\in\mathrm{Hol}(U\setminus\{a\})$, so heißt $a\in U$ *isolierte Singulariät*, falls f dort nicht definiert ist. Wir klassifizieren drei Arten isolierter Singularitäten: a heiß

(i) *hebbare Singularität*, falls f in a holomorph fortsetzbar ist (siehe Riemannscher Hebbarkeitssatz)

(ii) *Pol,* wenn a nicht hebbar ist, aber ein $k\in\mathbb{N}$ existiert, sodass a hebbare Singularität von $(z-a)^k f$ ist. Die kleinste solche Zahl mit dieser Eigenschaft heißt *Vielfachheit des Pols.* Die Zahl k ist genau dann Vielfachheit des *Pols* a, wenn es eine Darstellung $f(z)=g(z)/(z-a)^k$, wobei g in a holomorph ist und $g(a)\neq 0$.

(iii) *wesentliche Singularität,* falls a weder hebbar, noch Pol ist.

Satz (Klassifikation von Singularitäten): Es sei $f\in\mathrm{Hol}(U\setminus\{a\})$. Dann existiert eine Laurent-Entwicklung von f in a, nämlich

$$f(z)=\varphi(z)+f_H(z) \text{ mit } f_H(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$$, dem Hauptteil und Nebenteil $\varphi(z)$

und die drei Fälle entsprechen

(i) a hebbar $\Leftrightarrow$ $f_H=0$

(ii) a Pol mit Vielfachheit k $\Leftrightarrow$ $\forall n>k: a_{-n}=0$ und $a_{-k}\neq 0$

(iii) Es gibt unendlich viele $a_{-n}\neq 0$

Beweis:

(i) Wäre $f_H\neq 0$, so gäbe es mindestens einen Koeffizienten $a_{-j}\neq 0$ und es wäre f in a nicht beschränkt. Folglich könnte f dort nicht holomorph fortgesetzt werden.

(ii) a ist Pol mit Vielfachheit k genau dann, wenn k die kleinste Zahl ist, sodass a hebbare Singularität von $(z-a)^k f$ ist, was genau dann der Fall ist, wenn a hebbare Singularität von $(z-a)^k f_H$ ist. Diese Funktion besitzt eine Darstellung $(z-a)^k f_H=\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z-a)^{-n+k}$. Hieran sieht man: Die Singularität ist genau dann hebbar, wenn für $n>k\Leftrightarrow -n+k<0$ $a_{-n}=0$. Dabei ist $a_{-k}\neq 0$.

(iii) klar

Satz von Casorati-Weierstraß: Es sei $f\in \mathrm{Hol}(U\setminus\{a\})$ und wesentlich singulär in a. Dann liegt für jede Umgebung $V(a)\subset U(a)$ das Bild $f(V\setminus\{a\})$ dicht in $\mathbb{C}$, d.h. jede Kreisscheibe enthält einen Punkt $f(z)$ mit $z\in V(a)\setminus\{a\}$.

Beweis: Angenommen, es gibt eine Kreisscheibe $B_\varepsilon(w)$, die keinen der Punkte $f(z)$ mit $z\in V\setminus\{a\}$ enthält. Dann gibt es ein $\varepsilon>0$, sodass $|f(z)-w|\geq\varepsilon$ für alle $z\in V\setminus\{a\}$. Damit ist die Funktion $g:V\setminus\{a\}\to\mathbb{C}$

$$g(z):=\frac{1}{f(z)-w}$$

holomorph und durch $1/\varepsilon$ beschränkt. Folglich hat g in a eine hebbare Singularität. Also hat $f=1/g+w$ im Punkt a im Fall $\lim_{z\to a}g(z)\neq 0$ eine hebbare Singularität. Widerspruch! Falls $\lim_{z\to a}g(z)=0$: Da g nach Konstruktion nicht in einer Umgebung von a identisch Null sein kann, existiert eine Entwicklung $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$ mit $a_0=0$, jedoch einem kleinsten Index k, sodass $a_k\neq 0$. Also ist dann

$$(z-a)^k f=\frac{(z-a)^k}{\sum_{n=k}^{\infty}a_n(z-a)^n}+w=\frac{(z-a)^k}{(z-a)^k\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}(z-a)^n}+w=\frac{1}{a_k+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+k}(z-a)^n}+w$$

Am Nenner ließt man ab, dass $(z-a)^k f$ in a hebbar ist, also f einen Pol k-ter Vielfachheit besitzt. Also ist a insbesondere keine wesentliche Singularität. Ebenfalls Widerspruch!

4 Folgerungen aus den Integralsätzen

Lemma (Restglied bei Potenzreihen): Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann existiert für jedes $r < R$ ein $c \in \mathbb{R}$, sodass für das Restglied

$$R_n(z) := \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-a)^k \text{ gilt } \forall z \in B_r(a) : \left|R_n(z)\right| \le c\left|z-a\right|^n$$

Beweis: Wir setzen $c := \sum_{k=0}^{\infty} \left|a_{n+k}\right| r^k$. Dann gilt für beliebiges $z \in B_r(a)$

$$\left|R_n(z)\right| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-a)^k\right| \le \sum_{k=n}^{\infty} \left|a_k\right| \left|(z-a)\right|^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left|a_{k+n}\right| \left|(z-a)\right|^{k+n}$$

$$\le \left|(z-a)\right|^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left|a_{k+n}\right| r^k = c\left|(z-a)\right|^n$$

Identitätssatz für Potenzreihen: Die Reihe $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$ habe Konvergenzradius $R > 0$. Außerdem seien nicht alle a_k Null. Dann existiert ein $r < R$, sodass gilt: In $B_r(a)$ liegen höchstens endlich viele Nullstellen von f.

Beweis: Es sei $n \in \mathbb{N}$ der kleinste Index mit $a_n \neq 0$. Zu einem beliebigen Radius $r < R$ wählen wir gemäß obiger Restgliedabschätzung ein $c \in \mathbb{R}$, sodass

$$\left|f(z) - a_n (z-a)^n\right| \le c \cdot \left|z-a\right|^{n+1} \quad (*)$$

Angenommen, die Aussage des Satzes wäre falsch. Dann läge für jedes $i \in \mathbb{N}$ im Kreis $B_{r/i}(a)$ eine Nullstelle z_i von f. Für alle diese Nullstellen liefert $(*)$ die Abschätzung

$$\left|f(z_i) - a_n (z_i - a)^n\right| = \left|a_n\right| \left|z_i - a\right|^n \le c\left|z_i - a\right|^{n+1} \Leftrightarrow \left|a_n\right| \le c\left|z_i - a\right|^n$$

Für $i \to \infty$ geht aber $z_i \to a$ und folglich $\left|z_i - a\right| \to 0$. Also wäre $a_n = 0$ im Widerspruch zur Wahl von n!

Folgerung I: Für obige Potenzreihe f sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = 0$

(ii) $f \equiv 0$

(iii) f besitzt einen Häufungspunkt von Nullstellen in $B_R(a)$

Beweis: Die Implikationen (i)$\Rightarrow$(ii) und (ii)$\Rightarrow$(iii) sind trivial. Die Implikation (iii)$\Rightarrow$(i) ist gerade die Verneinung des obigen Satzes.

Folgerung I: Die Potenzreihen $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$ und $g(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-a)^k$ mögen positive Konvergenzradien haben. Es gebe eine Folge $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{i\to\infty} z_i = a$. Es gelte $\forall i\in\mathbb{N}: f(z_i)=g(z_i)$. Dann gilt: $\forall k\in\mathbb{N}: a_k=b_k$.

Beweis: $f-g$ besitzt einen Häufungspunkt von Nullstellen. Nach obiger Folgerung ist also $f-g=0 \Leftrightarrow f=g$.

Identitätssatz der Funktionentheorie: Es sei $U\subset\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und $f\in \mathrm{Hol}(U)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $f\equiv 0$
(ii) Die Menge der Nullstellen von f hat einen Häufungspunkt
(iii) Es gibt eine Nullstelle von f unendlicher Ordnung

Beweis:
(i)$\Rightarrow$(ii): Jeder Punkt ist Häufungspunkt.
(ii)$\Rightarrow$(iii): Es sei z_m eine Folge von Nullstellen mit Häufungspunkt $z_0=\lim_{m\to\infty} z_m$. Da f holomorph ist, ist f insbesondere stetig und es gilt $f(z_0)=\lim_{m\to\infty} f(z_m)=0$. Da f eine Darstellung als Potenzreihe $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$ besitzt, ist nach dem Identitätssatz für Potenzreihen $f=0$ in einer Umgebung von z_0. Also sind alle $a_k=0$ und wegen der Eindeutigkeit der Potenzreihendarstellung ist $0=a_k=f^{(k)}(a)/k! \Rightarrow f^{(k)}(a)=0$. Also hat f dort eine Nullstelle unendlicher Ordnung.
(iii)$\Rightarrow$(i): Nullstelle unendlicher Ordnung bedeutet, dass es einen Punkt $a\in U$ gibt, sodass $\forall k\in\mathbb{N}: f^{(k)}(a)=0$. Aufgrund der Holomorphie von f existiert eine Potenzreihenentwicklung $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$ in einer Umgebung von a mit echt positivem Konvergenzradius. Aus $\forall k\in\mathbb{N}: f^{(k)}(a)=0$ folgt, dass alle $a_k=0$ sind. Folglich ist $f=0$ im gesamten Konvergenzkreis der Potenzreihe. Deren Konvergenzkreis geht aber mindestens bis zum Rand von U. Für jeden beliebigen anderen Punkt $a'\in U$ gibt es aufgrund des einfachen Zusammenhangs von U einen Weg von a nach a'. Liegt a' nicht im Konvergenzkreis der Potenzreihe, so entwickle man die Funktion am Rand des Konvergenzkreises erneut. Erneut liegt auch in diesem Konvergenzkreis eine Nullstelle unendlicher Ordnung. Dies kann man so lange fortsetzen, bis a' erreicht wird, da die Konvergenzradien immer echt positiv sind und mindestens bis zum Rand von U reichen.

Corollar Permananzprinzip: Seien $f,g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ holomorph und auf $\mathbb{R}$ gleich. Dann sind sie auch auf ganz $\mathbb{C}$ gleich.

Beweis:
$f-g$ hat mit $\mathbb{R}$ unendlich viele Nullstellen unendlicher Ordnung.

Satz von Liouville: Es sei $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ holomorph und beschränkt durch K. Dann gilt: f ist konstant.

Beweis: Es sei $z_0\in\Omega$. Wir stellen $f(z_0)$ gemäß der Cauchyschen Integralformel als Kurvenintegral um einen Kreis $\partial B_R(z_0)$ da. Dann gilt für jedes $R>0$:

$$f'(z_0)=\frac{1}{2i\pi}\frac{d}{dz_0}\int\limits_{\partial B_R(z_0)}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\partial B_R(z_0)}\frac{d}{dz_0}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\partial B_R(z_0)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

Also ist

$$|f'(z_0)|=\left|\frac{1}{2i\pi}\right|\left|\int\limits_{\partial B_R(z_0)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz\right|\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial B_R(z_0)}\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\right|dz\le\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{K}{R^2}\cdot 2\pi R=\frac{K}{R}\xrightarrow{R\to\infty}0$$

Und damit $f'(z_0)=0$.

Fundamentalsatz der Algebra: $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

Beweis: Eine äquivalente Formulierung lautet: Jedes nicht-konstante Polynom $p\in\mathbb{C}[X]$ besitzt mindestens eine Nullstelle. Es sei $p(z):=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$ ein nicht-konstantes Polynom. Angenommen, p hätte keine Nullstelle. Dann wäre $1/p$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Für Polynome gilt ja

$$\lim_{|z|\to\infty}|p(z)|=\infty\Rightarrow\lim_{|z|\to\infty}\frac{1}{|p(z)|}=0$$

Also existiert zu $\varepsilon=1$ ein $R>0$, sodass

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus B_R(0):\frac{1}{|p(z)|}\le 1$$

Da $1/p$ holomorph ist, ist es insbesondere stetig und nimmt auf dem Kompaktum $\bar{B}_R(0)$ sein Maximum an. Es sei daher

$$M:=\max_{z\in\bar{B}_R(0)}\frac{1}{|p(z)|}$$

Also ist $1/p$ auf $\bar{B}_R(0)\cup(\mathbb{C}\setminus B_R(0))=\mathbb{C}$ durch $\max(M,1)$ beschränkt. Nach dem Satz von Liouville existiert also eine Konstante $K\in\mathbb{C}$, sodass

$$\forall z\in\mathbb{C}:\frac{1}{p(z)}=K\Leftrightarrow p(z)=\frac{1}{K},$$

denn es muss gelten $K\neq 0$. Folglich ist p konstant. Widerspruch!

Frehse-Beweis: Eine äquivalente Formulierung lautet: Jedes nicht-konstante Polynom $p\in\mathbb{C}[X]$ besitzt mindestens eine Nullstelle. Es sei $p(z):=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$ ein nicht-konstantes Polynom. Angenommen, p hätte keine Nullstelle. Dann wäre $1/p$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Wir wollen jetzt zeigen, dass $1/p$ beschränkt ist:

Es ist $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = z^n \left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^{k-n} \right)$ und $\lim_{|z| \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^{k-n} \right) = a_n$. Es sei $\varepsilon > 0$. Folglich existiert ein $L > 0$, sodass

$$\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq L : \left| a_n - \sum_{k=0}^{n} a_k z^{k-n} \right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k z^{k-n} \in \overline{B}_{\varepsilon}(a_n)$$

Wegen der Kompaktheit von $\overline{B}_{\varepsilon}(a_n)$ gibt es also insbesondere ein

$$M := \min_{|z| > L} \sum_{k=0}^{n} a_k z^{k-n}$$

Damit ist

$$\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq L : |p(z)| = |z|^n \cdot \left| \sum_{k=0}^{n} a_k z^{k-n} \right| \geq |z|^n M$$

Folglich gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq L$

$$\left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq \frac{1}{z^n M} \xrightarrow{|z| \to \infty} 0$$

Also ist $1/p$ beschränkt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq L$. Da p nach Voraussetzung keine Nullstellen hat, ist $1/p$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq L$ definiert und stetig. Wegen der Kompaktheit von $\overline{B}_L(0)$ nimmt die Funktion dort ein Maximum an, ist also insbesondere ebenfalls beschränkt. Folglich ist $1/p$ auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt und nach dem Satz von Liouville damit konstant. Es existiert also ein $0 \neq c \in \mathbb{C}$, sodass

$$1/p(z) = c \Rightarrow p(z) = \frac{1}{c}$$

Also ist auch $p(z)$ konstant. Widerspruch!

5 Folgen holomorpher Funktionen

Definition (lokal gleichmäßig beschränkt): Eine Folge von Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt *lokal gleichmäßig beschränkt,* falls es für jedes Kompaktum $K \subset \Omega$ eine Zahl C_K gibt, sodass

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall z \in K : \left| f_n(z) \right| \leq C_K$$

Satz von Weierstraß (Königsberger): Es sei (f_n) eine Folge holomorpher Funktionen auf einer offenen Menge U, die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiere, d.h. jeder Punkt in U besitzt eine Umgebung, in der die Folge gleichmäßig konvergiert. Dann gilt:

(i) f ist holomorph

(ii) (f_n') konvergiert ebenfalls lokal gleichmäßig gegen f'

Beweis:

(i) Es sei $\bar{K}_r(a)$ eine Kreisscheibe, in der f_n gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann ist f dort stetig und für jedes Dreieck $\Delta \subset K_r(a)$ gilt: $\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\partial\Delta} f_n(z)\,dz = 0$. Also ist nach dem Satz von Morera f dort holomorph.

(ii) Es sei $\bar{K}_\rho(a) \subset U$ vorgegeben. Dann wählen wir eine Kreisscheibe $K_r(a) \subset U$ mit $r > \rho$. Dann gilt aufgrund der Integraldarstellung der Ableitung:

$$\| f_n' - f' \|_{\bar{K}_\rho(a)} = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K_r(a)} \frac{(f_n - f)(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right\|_{\bar{K}_\rho(a)} \leq \frac{1}{2\pi} \left| \partial K_r(a) \right| \max_{\xi \in K_r(a)} \left| \frac{1}{(\xi - z)^2} \right| \| f_n - f \|_{\bar{K}_\rho(a)}$$

$$= \frac{r}{(r-\rho)^2} \| f_n - f \|_{\bar{K}_\rho(a)}$$

Folglich überträgt sich die gleichmäßige Konvergenz der (f_n) auf (f_n')

Weierstraßscher Doppelfolgensatz: Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f_m : \Omega \to \mathbb{C}$ eine lokal gleichgradig beschränkte Folge stetiger Funktionen. Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \Omega$ abzählbar viele Punkte aus Ω. Dann existiert eine Teilfolge $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$, $n \in \Lambda \subset \mathbb{N}$, die auf allen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert.

Beweis durch Induktion nach k: Für $k = 1$ folgt die Aussage aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß: Nach Voraussetzung ist die Zahlenfolge $\left(f_n(a_1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Es existiert also eine konvergente Teilfolge, d.h. es existiert eine unendliche Indexmenge $\Lambda_1 \subset \mathbb{N}$, sodass $\left(f_n(a_1)\right)_{n\in\Lambda_1}$ konvergiert.

Indutkionsschluss $k-1 \to k$: Es existiere also eine Teilfolge $\left(f_n\right)_{n\in\Lambda_{k-1}}$, die auf allen $a_1,\dots,a_{k-1}$ konvergiert. Nun ist aber auch diese Teilfolge $\left(f_n\right)_{n\in\Lambda_{k-1}}$ bei a_k beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß kann man also wieder eine in a_k konvergente Teilteilfolge auswählen, d.h. es existiert wieder eine unendliche Indexmenge $\Lambda_k \subset \Lambda_{k-1}$, sodass $\left(f_n\left(a_k\right)\right)_{n\in\Lambda_k}$ konvergiert. Als Teilfolge konvergenter Folgen konvergieren die Zahlenfolgem $\left(f_n\left(a_i\right)\right)_{n\in\Lambda_k}$ damit natürlich auch weiterhin für alle anderen $1 \le i \le k-1$.
Bezeichnet man jetzt mit k_k den k-ten Index aus Λ_k, so konvergiert die Funktionenfolgefolge $\left(f_{k_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ auf allen $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Satz von Arzela-Ascoli: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f_m : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichgradig stetig und beschränkt ist. Dann existiert eine auf Ω gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Beweis: Es sei $\left(l_j\right)_{j\in\mathbb{N}} := \Omega \cap \mathbb{Q}^2$. Aus der gleichgradigen Beschränktheit der f_m folgt nach dem Weierstraßschen Doppelfolgensatz, dass es eine Teilfolge $\left(f_m\right)_{m\in\Lambda\subset\mathbb{N}}$ gibt, die auf allen l_j konvergiert. Wegen der gleichgradigen Stetigkeit der f_m und der Tatsache dass $\mathbb{Q}^2$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt, bleibt die Differenz $\left|f_r\left(x\right)-f_s\left(x\right)\right|$ nahe bei einem $\left|f_r\left(l_j\right)-f_s\left(l_j\right)\right|$.

Satz von Weierstraß-Montel (Vorlesung): Es sei $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ eine lokal gleichmäßig beschränkte Folge holomorpher Funktionen. Dann existiert eine Teilfolge $\left(f_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, die lokal gleichmäßig, d.h. auf jedem Kompaktum $K \subset \Omega$, gleichmäßig konvergiert.

Definition: Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{C}$ heißt *diskret*, falls gilt:

$$\forall z \in \Omega : \exists U_\varepsilon\left(z\right) : \forall y \in U_\varepsilon\left(z\right) : y \notin M$$

Satz: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und beschränkt, Es sei $\left(f_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig beschränkte Folge holomorpher Funktionen auf Ω, die auf einer nicht-diskreten Menge $M \subset \Omega$ punktweise gegen eine Funktion $g : M \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann gilt: $\left(f_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf ganz Ω.

Definition (L^p-Norm): Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann heißt

$$\left\|f\right\|_{L^p(\Omega)} := \int_{\Omega'} \left|f\left(\xi + i\eta\right)\right|^p d\left(\xi,\eta\right)$$

die $L^p\left(\Omega\right)$-Norm, wobei wir mit Ω' die Menge Ω aufgefasst als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ bezeichnen.

Lemma: Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$, $a \in \Omega$ und $R > 0$ sodass $B_R(a) \subset \Omega$. Dann gilt für jedes $z := x + iy \in B_R(a)$:

$$\left| f(x+iy) \right| \leq \frac{1}{R^2 \pi} \| f \|_{L^1(B_R(a))}$$

Beweis: Nach der Mittelwertformel gilt für jedes $0 \leq r \leq R$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z + re^{it}\right) dt \Rightarrow \left| f(z) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(z + re^{it}\right) \right| dt$$

$$\Rightarrow r \cdot \left| f(z) \right| \leq r \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(z + re^{it}\right) \right| dt \Rightarrow \int_0^R r \cdot \left| f(z) \right| dr \leq \int_0^R \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(z + re^{it}\right) \right| dt dr$$

$$\Rightarrow \left| f(z) \right| \frac{R^2}{2} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \left| f\left(z + re^{it}\right) \right| r dt dr \overset{(*)}{\Rightarrow} \left| f(z) \right| \leq \frac{1}{\pi R^2} \int_{B_R(z)} \left| f(z) \right| dz$$

$(*)$: Hier benutzen wir eine Kombination aus Transformationssatz, Satz von Fubini und Polarkoordinaten.

Definition (Hardysche Funktionenräume): Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$, dann heißt

$$H^p(\Omega) := \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\Omega) \mid \| f \|_{L^p(\Omega)} < \infty \right\} \text{ mit } 1 \leq p < \infty$$

Hardyscher Funktionenraum.

Satz: Die Hardyschen Funktionenräume sind bzgl. der $L^p(\Omega)$-Norm vollständig.

Beweis für $p = 1$: Es sei (f_k) Cauchy-Folge bzgl. der $L^1(\Omega)$-Norm. Es sei $\varepsilon > 0$, dann folgt nach Definition

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall k, m \geq N_0 : \| f_k - f_m \|_{L^1(\Omega)} \leq \varepsilon$$

Es sei $a \in \Omega$, dann folgt aus der Offenheit von Ω, dass es ein $R > 0$ gibt, sodass $B_R(a) \subset \Omega$. Es gilt dann mit $C := \frac{1}{\pi R^2}$ nach obigem Lemma

$$\forall z \in B_R(a) : \left| f_k(z) - f_m(z) \right| \leq C \cdot \| f_k - f_m \|_{L^1(B_R(a))} \leq C \cdot \| f_k - f_m \|_{L^1(\Omega)} \leq C \cdot \varepsilon$$

Also ist (f_k) auf $B_R(a)$ auch eine Cauchy-Folge bzgl. der Supremumsnorm, d.h. f_k ist eine lokal gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergierende Folge.
Fortsetzung Nikolai: Nach dem Satz von Weierstraß Montel ist f holomorph. Integrierbarkeit folgt aus der Vollständigkeit des $L^1(\Omega)$.
Fortsetzung Frehse: Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt, dass die Funktion f insbesondere stetig ist. Damit ist (f_k) auch lokal gleichmäßig beschränkt, denn aus Konvergenz folgt Beschränktheit: Es sei $K \subset \Omega$ Kompaktum und $\varepsilon = 1$

$$\Rightarrow \exists N_0 : \forall k \geq N_0 : \| f_k - f \|_{\infty,K} \leq 1$$

Da für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $\| f_k \|_{\infty,K} \leq \| f_k - f \|_{\infty,K} + \| f \|_K$, ist

$$\| f_k \|_{\infty,K} \leq \max\left(\max_{1 \leq k \leq N_0} \left\{ \| f_k \|_{\infty,K} \right\}, \| f \|_{\infty,K} + 1 \right)$$

Damit ist der Satz von Montel anwendbar und es folgt die Holomorphie von f. Da man bei der komplexen L^p-Norm lediglich Ω als Teilmenge von $\mathbb{C}$, folgt aus der

Vollständigkeit des reellen Raumes $L^1(\Omega)$ schließlich die Integrierbarkeit von f.
Folglich ist auch $f \in H^1(\Omega)$.

6 Residuensatz

Definition (Residuum): Es sei $f \in \mathrm{Hol}\left(K_r^*(a)\right)$ und $\partial B_\rho(a) \subset K_r^*(a)$. Dann heißt

$$\operatorname{res}_a f := \operatorname{res}(f,a) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_\rho(a)} f(z)\,dz$$

Residuum von f in a.

Lemma: Es sei $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_k (z-a)^k$ eine Laurent-Entwicklung von f in a. Dann gilt

$$\operatorname{res}_a f = a_{-1}$$

Beweis:
Die Funktion $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_k (z-a)^k - \frac{a_{-1}}{z-a}$ hat in $K_r^*(a)$ eine Stammfunktion. Folglich gilt:

$$\int\limits_{\partial B_\rho(a)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_k (z-a)^k - \frac{a_{-1}}{z-a}\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\partial B_\rho(a)} f(z)\,dz = \int\limits_{\partial B_\rho(a)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_k (z-a)^k dz = a_{-1} \int\limits_{\partial B_\rho(a)} \frac{1}{z-a}\,dz = a_{-1} 2\pi i$$

Satz (Residuensatz): Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $\Gamma \subset \Omega$ positiv orientierte Rankurve eines verallgemeinerten Normalbereichs $B \subset \Omega$. Es gebe endlich viele *Singularitäten* $z_1,\ldots,z_N \in B$, sodass $f : B \setminus \{z_1,\ldots,z_N\} \to \mathbb{C}$ holomorph ist. Dann gilt

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{N} \operatorname{res}(f, z_k)$$

Beweis: Aufgrund des Cauchyschen Integralsatzes (oder wahlweise aus Homotopiegründen) existieren Radien $r_1,\ldots,r_k$, sodass

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\partial B_{r_k}(z_k)} f(z)\,dz$$

und in jedem der $B_{r_k}(z_k)$ kein andere Singularität liegt. Dann ist jede Einschränkung $f|_{\partial B_{r_k}(z_k)}$ in der punktierten Kreisscheibe $K_{r_k}^*(z_k)$ holomorph. Also folgt nach Definition des Residuums weiter

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\partial B_{r_k}(z_k)} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{N} \operatorname{res}(f, z_k)$$

Satz (Berechnung von Residuen 1): Es sei $U \subset \mathbb{C}$, $a \in U$, und $g, h \in \operatorname{Hol}(U)$ mit $g(a) \neq 0$ und $h(a) = 0$, jedoch $h'(a) \neq 0$. Dann gilt für $f : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := g(z)/h(z)$:

(i) f ist in einer Umgebung $U(a) \setminus \{a\}$ holomorph

(ii) f hat bei a einen einfachen Pol

(iii) $\operatorname{res}_a f = \dfrac{g(a)}{h'(a)}$

Beweis: Aus der Isoliertheit der Nullstellen holomorpher Funktionen folgt, dass es überhaupt eine punktierte Umgebung $U(a) \setminus \{a\}$ gibt, in der f holomorph ist. Aus den Voraussetzungen $g(a) \neq 0$ und $h(a)$ folgt, dass f in keiner noch so kleinen Umgebung $U(a)$ beschränkt sein kann. Folglich ist f dort nicht holomorph fortsetzbar. Wir betrachten:

$$\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = \lim_{z \to a} \frac{g(z)(z-a)}{h(z)} = \lim_{z \to a} \frac{g(z)(z-a)}{\frac{h(z)}{z-a}(z-a)} = \lim_{z \to a} \frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(a)}{z-a}} = \frac{g(a)}{h'(a)} < \infty$$

Also ist $(z-a) f(z)$ in einer Umgebung von a beschränkt und kann nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz dort holomorph fortgesetzt werden. Der Pol ist also einfach. Wir betrachten die Laurent-Entwicklung $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$. Da der Pol einfach ist, folgt, dass $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-a)^n$ mit $a_{-1} \neq 0$. Es folgt:

$$(z-a) f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1} (z-a)^n \Rightarrow (z-a) f(z)\Big|_{z=a} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1} (z-a)^n \Big|_{z=a} \Rightarrow \frac{g(a)}{h'(a)} = a_{-1} = \operatorname{res}_a f$$

□

Satz (Berechnung von Residuen 2): Es sei $U \subset \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ und $f : B_\varepsilon(c) \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ sei holomorph und besitze in c eine Polstelle höchstens m-facher Ordnung. Es sei g die holomorphe Fortsetzung von $(z-c)^m f(z)$. Dann gilt:

$$\operatorname{res}_c f = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(c)$$

Beweis: Es sei f holomorph in $B_\varepsilon(c)$ und besitze in c einen Pol m-ter Ordnung. Daraus folgt, dass die Laurent-Entwicklung von f in c von der Gestalt $f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-a)^n$ ist. Es sei g die holomorphe Fortsetzung von $(z-c)^m f(z)$ in c. Dann gilt:

$$g(z) = (z-c)^m f(z) = (z-c)^m \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z-c)^n$$

und $\operatorname{res}_c f = a_{-1}$. Durch Differentiation obiger Gleichung folgt:

$$\left.\frac{d^{(m-1)}}{dz^{(m-1)}} g(z)\right|_{z=c} = \left.\frac{d^{(m-1)}}{dz^{(m-1)}} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z-c)^n \right|_{z=c}$$
$$= \left.\sum_{n=m-1}^{\infty} a_{n-m} \Big(n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(m-2))\Big)(z-c)^{n-m+1}\right|_{z=c}$$
$$= a_{-1}\big((m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\big) = a_{-1}\cdot(m-1)!$$

Also insgesamt:

$$\operatorname{res}_c f = a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(c)$$

□

Satz (Berechnung von Residuen 3): Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $a \in \Omega$ und f meromorph auf Ω. Dann gilt falls $f \neq 0$ für $a \in \Omega$ beliebig:

$$\operatorname{res}\left(\frac{f'}{f};a\right) = \operatorname{ord}(f;a)$$

Dabei sei die Ordnung von f in a gleich k, falls f in a eine k-fache Nullstelle besitzt, $-k$, falls f dort eine k-fache Polstelle besitzt und 0 sonst.

Beweis: Sei $a \in \Omega$ beliebig gewählt und $g := f'/f$. Es können überhaupt nur 3 Fälle auftreten.
Fall 1: a ist k-fache Nullstelle von f, d.h. f ist in einer Umgebung U von a holomorph und besitzt dort eine Darstellung $f(z) = (z-a)^k h(z)$ mit $h(a) \neq 0$. Also.

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\left((z-a)^k h(z)\right)'}{(z-a)^k h(z)} = \frac{k(z-a)^{k-1} h(z) + (z-a)^k h'(z)}{(z-a)^k h(z)} = \frac{kh(z) + (z-a)h'(z)}{(z-a)h(z)}$$

Die Funktion g ist also meromorph in U mit einem einfachen Pol bei a. Aus dem Satz über die Berechnung von Residuen 1 folgt damit:

$$\operatorname{res}(g;a) = \frac{\left. kh(z) + (z-a)h'(z)\right|_{z=a}}{\left.\frac{d}{dz}(z-a)h(z)\right|_{z=a}} = \frac{kh(a) + (a-a)h'(a)}{h(a) + (a-a)h'(a)} = \frac{kh(a)}{h(a)} = k = \operatorname{ord}(f;a)$$

Fall 2: a ist k-fache Polstelle von f. Dann ist a k-fache Nullstelle von $\tilde{f} := 1/f$ und nach Fall 1 ist

$$k = \operatorname{res}\left(\frac{\tilde{f}'}{\tilde{f}}, a\right)$$

Nun ist aber

$$\frac{\tilde{f}'}{\tilde{f}} = \frac{-\frac{1}{f^2} f'}{\frac{1}{f}} = -\frac{f'}{f} = -g$$

Also ist

$$\operatorname{res}(g,a) = \operatorname{res}\left(-\frac{\tilde{f}'}{\tilde{f}}, a\right) = -\operatorname{res}\left(\frac{\tilde{f}'}{\tilde{f}}, a\right) = -k = \operatorname{ord}(f;a)$$

Fall 3: a ist weder Null noch Polstelle von f. In diesem Fall sind trivialerweise beide Seiten der Gleichung 0, da der Quotient f'/f in einer Umgebung von a holomorph ist.

In diesem Zusammenhang häufig auch nützlich ist der

Satz (Komplexer de l'Hospitale): Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph und es gelte

$$\forall 0 \le k < n : f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) = 0 \text{ und } g^{(n)}(a) \ne 0$$

Dann gilt:

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

Beweis: Die Holomorphie von f ist äquivalent zu einer lokalen Potenzreihen-Darstellung der Form

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu \ , \ a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}$$

Da nun f eine Nullstelle der Ordnung n bei a hat, gilt

$$\forall 0 \le \nu \le n-1 : a_\nu = 0$$

und folglich ist

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu = \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu+n} (z-a)^{\nu+n} = (z-a)^n \underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu+n} (z-a)^\nu}_{=:h_1(z)}$$

Völlig analog existiert auch für g eine Potenzreihenentwicklung

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z-a)^\nu \ , \ b_\nu = \frac{g^{(\nu)}(a)}{\nu!}$$

welche sich genauso umformen lässt zu einer Darstellung der Form

$$g(z) = (z-a)^n h_2(z)$$

Hier gilt nach Voraussetzung $h_2(a) \ne 0$.

Also folgt insgesamt, da sowohl h_1 als auch h_2 holomorph und damit insbesondere stetig sind, dass

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to a} \frac{(z-a)^n h_1(z)}{(z-a)^n h_2(z)} = \frac{h_1(a)}{h_2(a)} = \frac{a_n}{b_n} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

□

Definition (rationale Funktion): Es seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $p, q \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$. Es sei N die (endliche) Nullstellenmenge von q. Dann heißt die Funktion $f : \mathbb{K}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{K}$ mit

$$f(x) := \frac{p(x)}{q(x)}$$

rationale Funktion von n Veränderlichen.

Definition (Cauchyscher Hauptwert): Es sei $f \in C^0(\mathbb{R})$ dann heißt im Falle der Existenz der Grenzwert

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

Cauchyscher Hauptwert von f.

Satz (Integrale knacken Typ I): Es seien $p,q \in \mathbb{C}[X]$, $R = p/q$ eine rationale Funktion einer Veränderlichen, es sei $\deg(q) \geq \deg(p)+2$, es sei N die Nullstellenmenge von q und es sei $N \cap \mathbb{R} = \varnothing$. Dann existiert das folgende reelle Integral und es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname{res}(R,z_k),$$

wobei $\{z_k\}_{k=1}^{m}$ die Polstellen von R in die oberen Halbebene seien.

Beweis:
Nach Voraussetzung hat R keine Polstellen auf der reellen Achse. Damit folgt aus $\deg(q) \geq \deg(p)+2$ die Existenz des Integrals, da es sich asymptotisch verhält wie C/x^2 für $|x| \to \infty$. Folglich darf das Integral mit dem Cauchyschem Hauptwert berechnet werden.
Es seien $\{z_k\}_{k=1}^{m}$ die Polstellen von R in der oberen Halbebene von $\mathbb{C}$ die wir ab sofort mit $\mathbb{H}$ bezeichnen. Da dies nur endlich viele sind, können wir ein $r > 0$ wählen, sodass alle Singularitäten im oberen Halbkreis $\gamma_r : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_r(t) := re^{it}$ liegen.
Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt folglich:

$$\int_{-r}^{r} R(z)\,dz + \int_{\gamma_r} R(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname{res}(R,z_k)$$

Wegen $\deg(q) \geq \deg(p)+2$ gibt es $\delta > 0$ und $C > 0$, sodass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \delta$ gilt $|R(z)| \leq \frac{C}{|z|^2}$.

$$\Rightarrow \left|\int_{\gamma_r} R(z)\,dz\right| \leq \int_{\gamma_r} |R(z)|\,dz \leq \int_{\gamma_r} \frac{C}{|z|^2}\,dz \leq |\gamma_r| \cdot \frac{C}{r^2} = \pi r\frac{C}{r^2} = \frac{\pi C}{r} \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

Damit gilt:

$$2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname{res}(R,z_k) = \lim_{r\to\infty}\left(2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname{res}(R,z_k)\right) = \lim_{r\to\infty}\left(\int_{-r}^{r} R(z)\,dz + \int_{\gamma_r} R(z)\,dz\right) = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx$$

Satz (Integrale knacken Typ II): Es seien $p,q \in \mathbb{C}[X,Y]$, $R = p/q$ eine rationale Funktion einer Veränderlichen, es sei N die Nullstellenmenge von q und es sei $N \cap \partial B_1(0) = \varnothing$. Dann existiert das folgende reelle Integral und es gilt:

$$\int_{0}^{2\pi} R(\sin(x),\cos(x))\,dx = 2\pi \cdot \sum_{k=1}^{m}\operatorname{res}\left(R\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\cdot\frac{1}{z}, z_k\right),$$

wobei $\{z_k\}_{k=1}^m$ die Polstellen von R in $B_1(0)$ seien.

Beweis: Es sei $\gamma :]0,2\pi[\to \mathbb{C}$ eine Parametrisierung mit $\gamma(t) := e^{it}$. Da gilt:

$$\cos(z) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \text{ und } \sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

folgt:

$$\int_0^{2\pi} R\left(\sin(t), \cos(t)\right) dt = \int_0^{2\pi} R\left(\frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right), \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} R\left(\frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right), \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)\right) \cdot \frac{ie^{it}}{ie^{it}} dt$$

$$= \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} R\left(\frac{1}{2i}\left(\gamma(t) - \frac{1}{\gamma(t)}\right), \frac{1}{2}\left(\gamma(t) + \frac{1}{\gamma(t)}\right)\right) \cdot \dot{\gamma}(t)\frac{1}{\gamma(t)} dt$$

$$= \frac{1}{i} \cdot \int_{\partial B_1(0)} R\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) \cdot \frac{1}{z} dz = 2\pi \cdot \sum_{k=1}^m \operatorname{res}\left(R\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) \cdot \frac{1}{z}, z_k\right)$$

Satz (Integrale knacken Typ III): Es sei $f : U(\mathbb{H}) \to \mathbb{C}$ holomorph bis auf endlich viele Singularitäten $\{z_k\}_{k=1}^m$, wobei keine Singularitäten auf $\mathbb{R}$ seien. Ferner gelte $\lim_{|z|\to\infty, \operatorname{Im}(z)\geq 0} f(z) = 0$. Dann folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} f(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^m \operatorname{res}\left(f(z)e^{iz}, z_k\right)$$

Beweis:
Es ist zunächst zu zeigen, dass das Integral überhaupt existiert. Wähle $r_1, r_2, s > 0$ so groß, dass alle z_k im Rechteck liegen, welches von $-r_1, r_2$, und den Parametrisierungen $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_1(t) := r_2 + its$, $\gamma_2 : [-r_1, r_2] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_2(t) := t + si$ und $\gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_3(t) := r_1 + ist$ gebildet wird. Es gilt dann:

$$\int_{-r_1}^{r_2} f(z)e^{iz} dz + \int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} f(z)e^{iz} dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^m \operatorname{res}\left(f(z)e^{iz}, z_k\right)$$

Wir wollen nun zeigen, dass

$$\left|\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} f(z)e^{iz} dz\right| \xrightarrow{r_1, r_2 \to \infty} 0 \text{ für geeignetes } s$$

Sei $\varepsilon > 0$. Aus der Voraussetzung $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$ folgt, dass es ein $R > 0$ gibt, sodass $|f(z)| < \varepsilon$ für alle $|z| > R$. Seien $r_1, r_2 > R$. Dann folgt:

$$\left|\int_{\gamma_1} f(z)e^{iz} dz\right| = \left|\int_0^1 f(r_2 + ist)e^{i(r_2+ist)} isdt\right| \leq \int_0^1 \left|f(r_2 + ist)\right| \cdot \left|e^{ir_2 - st} is\right| dt$$

$$\leq \varepsilon \cdot \int_0^1 e^{-st} sdt = \varepsilon \cdot \left[-e^{-ts}\right]_0^1 = \varepsilon\left(1 - e^{-s}\right) \leq \varepsilon$$

Analog ist auch $\left|\int_{\gamma_3} f(z)e^{iz}dz\right| < \varepsilon$.

Ferner gilt: $\left|e^{iz}\right| = \left|e^{i(\mathrm{Re})z + i\,\mathrm{Im})z)}\right| = \left|e^{i(\mathrm{Re})z + i\,\mathrm{Im})z)}\right| = e^{-\mathrm{Im}(z)}$. Wähle nun r_1, r_2, s so, dass gilt: $s > r_1 + r_2 > R$. Dann folgt:

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)e^{iz}dz\right| \leq |\gamma_2| \cdot \sup_{z\in sp(\gamma_2)} |f(z)| e^{-s} \leq (r_1 + r_2)\cdot \varepsilon \cdot e^{-s} \leq \varepsilon$$

Folglich gilt wie behauptet

$$\left|\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} f(z)e^{iz}dz\right| \xrightarrow{r_1,r_2\to\infty} 0$$

und dabei sind r_1, r_2 voneinander entkoppelt. Damit existiert das Integral und es folgt die Behauptung.

Corollar:

(i) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix}dx = -2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{m} \mathrm{res}\left(f(z)e^{-iz}, z_k\right)$, wobei $\{z_k\}_{k=1}^{m}$ die Menge der Singularitäten in der unteren Halbebene sei.

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(x)dx = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}dx\right) = -2\pi \cdot \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{m} \mathrm{res}\left(f(z)e^{iz}, z_k\right)\right)$, wobei $\{z_k\}_{k=1}^{m}$ die Menge der Singularitäten in der unteren Halbebene sei.

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(x)dx = \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}dx\right) = 2\pi \cdot \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{m} \mathrm{res}\left(f(z)e^{iz}, z_k\right)\right)$, wobei $\{z_k\}_{k=1}^{m}$ die Menge der Singularitäten in der unteren Halbebene sei.

Folgerung I: Es sei $R(z)$ eine rationale Funktion, deren Nennergrad um mindestens eins größer ist als der Zählergrad und die auf $\mathbb{R}$ eine einfache Polstelle a hat. Dann gilt:

$$\lim_{\rho\to 0}\left(\int_{-\infty}^{a-\rho} R(x)e^{ix}dx + \int_{a+\rho}^{\infty} R(x)e^{ix}dx\right) = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{m} \mathrm{res}\left(R(z)e^{iz}, z_k\right) + \pi i \cdot \mathrm{res}\left(R(z)e^{iz}, a\right),$$

wobei $\{z_k\}_{k=1}^{m}$ die Singularitäten in der oberen Halbebene seien.

Beweis: Es sei o.B.d.A. $a = 0$. Wir fügen zu unseren Parametrisierungen einen kleinen Halbkreis über der Singularität hinzu: $\gamma_\rho : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_\rho(t) := \rho e^{i(\pi - t)}$. Dann gilt:

$$\underbrace{\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} R(z)e^{iz}dz}_{\to 0} + \int_{-r_1}^{-\rho} R(z)e^{iz}dz + \int_{\rho}^{r_2} R(z)e^{iz}dz + \int_{\gamma_\rho} R(z)e^{iz}dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{m} \mathrm{res}\left(R(z)e^{iz}, z_k\right)$$

Es bleibt also nur noch zu zeigen:

$$\lim_{\rho\to 0} \int_{\gamma_\rho} R(z)e^{iz}dz = -\pi i \cdot \mathrm{res}\left(R(z)e^{iz}, a\right)$$

Nach Voraussetzung hat $R(z)$ in $a=0$ einen einfachen Pol und folglich lässt sich $R(z)\cdot e^{iz}$ in einer Umgebung $U(a)$ darstellen als $\frac{C}{z}+g(z)$, wobei $C\in\mathbb{R}$ und g holomorph. Damit gilt:

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma_\rho} R(z)e^{iz}dz=\lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma_\rho}\frac{C}{z}+g(z)\,dz=\lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma_\rho}\frac{C}{z}dz=\lim_{\rho\to 0}\int_0^\pi \frac{C}{\rho e^{i(\pi-t)}}\cdot\left(-i\rho\cdot e^{i(\pi-t)}\right)$$

$$=-i\int_0^\pi C\,dt=-\pi i\cdot C=-\pi i\cdot\operatorname{res}\left(R(z)e^{iz},a\right)$$

7 Mittelwerteigenschaft, Maximumprinzip

Wir haben schon bewiesen, dass gilt:

Satz (Mittelwertformel): Es sei $f \in \mathrm{Hol}(\Omega), z \in \Omega$ und $r > 0$, sodass $B_r(z) \subset \Omega$. Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z + re^{it}\right) dt$$

Folgerung (Schwaches Maximumprinzip): Für jeden Kreis $\overline{B}_R(a) \subset \Omega$ gilt:

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z + re^{it}\right) dt\right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \mu([0, 2\pi]) \cdot \max_{z \in \partial B_r(0)} |f(z)| = \max_{z \in \partial B_r(0)} |f(z)|$$

Auf jedem Kreis nimmt die Funktion ihr Maximum also am Rand an.

Wir verschärfen:

Satz (Maximumprinzip): Es sei $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ und $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Ist f nicht konstant, so nimmt $|f|$ kein Maximum in Ω an.

Beweis: Wir zeigen zunächst: Hat $|f|$ in $a \in \Omega$ ein lokales Maximum, so existiert eine Umgebung, in der f konstant ist.
Es gelte

$$|f(a)| = \max_{z \in B_R(A)} |f(z)| = \max_{z \in \partial B_R(A)} |f(z)| =: M(r)$$

nach dem schwachen Maximumprinzip. Durch Multiplikation von f mit einem $\eta \in \mathbb{C}$ mit $|\eta| = 1$ (Drehung), können wir erreichen, dass $\eta f(a) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Da $|\eta f| = |f|$ können wir o.B.d.A. auch gleich annehmen, dass $f(a) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und dann folgt aus obiger Gleichung

$$\forall z \in B_R(a) : f(a) \geq |f(z)| \geq \mathrm{Re}(f(z))$$

Für die Funktion $g : B_R(a) \to \mathbb{R}$ mit

$$g(z) := \mathrm{Re}(f(a) - f(z))$$

gilt dann $g(z) \geq 0$.

Corollar: Es sei $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$, Ω offen und $K \subset \Omega$ kompakt. Dann nimmt $|f|$ ein Maximum auf ∂K an.

Corollar (Minimumprinzip): Es sei Ω ein Gebiet und $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$. Ist f nicht konstant und besitzt ein (lokales) Minimum in $a \in \Omega$, so folgt $f(a) = 0$.

Beweis: Wäre $f(a) \neq 0$, so würde die Funktion $1/f$ in einer offenen Umgebung $U(a)$ existieren, wäre holomorph und hätte im Innern von $U(a)$ ein Maximum im Widerspruch zum Maximumprinzip.

Man kann dies noch verfeinern zu:

Folgerung: Es sei $f : \overline{B}_r(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph und es sei $|f(z_0)| < \min\limits_{z \in \partial B_r(z_0)} |f(z)|$. Dann existiert eine Nullstelle von f in $B_r(z_0)$.

Beweis: Gäbe es keine Nullstelle, so wäre $1/f$ existent und holomorph. Ferner würde $1/f$ nach dem Maximumprinzip sein Maximum auf $\partial B_r(z_0)$ annehmen. Also wäre

$$\frac{1}{|f(z_0)|} \leq \max_{z \in \partial B_r(z_0)} \frac{1}{|f(z)|} = \frac{1}{\min\limits_{z \in \partial B_r(z_0)} |f(z)|} \Rightarrow |f(z_0)| \geq \min_{z \in \partial B_r(z_0)} |f(z)|$$

Widerspruch!

Definition: Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Dann heißt $a \in \Omega$ eine ω-Stelle von f, falls $f(a) = \omega$.

Satz von der Gebietstreue: Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt: f nicht konstant $\Rightarrow$ $f(\Omega) \subset \mathbb{C}$ ist ebenfalls ein Gebiet.

Beweis: Sei $\omega_0 \in f(\Omega)$. Wir müssen zeigen, dass eine Umgebung $B_\varepsilon(\omega_0) \subset f(\Omega)$ existiert. Es existiert zumindest ein $z_0 \in \Omega$, sodass $\omega_0 = f(z_0)$. Die Funktion $f - \omega_0$ hat nach dem Identitätssatz in einer Umgebung $U(z_0)$ keine weitere Nullstelle.
$\Rightarrow \exists \overline{B}_R(z_0) : \forall z \in \overline{B}_R(z_0) : f(z) \neq \omega_0$. Schon aus der Stetigkeit von f folgt, dass $R > 0$ so gewählt werden kann, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass sogar
$\forall z \in \overline{B}_R(z_0) : |f(z) - \omega_0| > 3\varepsilon$. Wir behaupten nun, dass mit diesem ε gilt:

$$\overline{B}_\varepsilon(\omega_0) \subset f(\Omega)$$

Es sei $\omega \in \overline{B}_\varepsilon(\omega_0)$. Dann gilt für alle $z \in \overline{B}_R(z_0)$:

$$|f(z) - \omega| = |f(z) - \omega_0 - (\omega - \omega_0)| \geq |f(z) - \omega_0| - |\omega - \omega_0| > 3\varepsilon - \varepsilon = 2\varepsilon$$

Also ist insbesondere $\min\limits_{z \in \partial B_R(z_0)} |f(z) - \omega| > 2\varepsilon$. Außerdem gilt nach Konstruktion $|f(z_0) - \omega| = |\omega_0 - \omega| < \varepsilon$. Damit ist

$$|f(z_0) - \omega| < \varepsilon < 2\varepsilon < \min_{z \in \partial B_R(z_0)} |f(z) - \omega|$$

und folglich existiert nach dem obigen Minimumprinzip eine Nullstelle $z_\omega \in B_R(z_0)$ von $f-\omega$ und mit dieser gilt dann $f(z_\omega)=\omega$. Da $\omega \in \overline{B}_\varepsilon(\omega_0)$ beliebig gewählt, folgt die Behauptung.

Corollar: Ist $f:\Omega \to \mathbb{C}$ holomorph auf einem Gebiet und $\mathrm{Re}(f)=\mathrm{const}$ oder $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{const}$ oder $|f|=\mathrm{const}$, dann ist $f=\mathrm{const}$.

Beweis: Ist $\mathrm{Re}(f)=:c$ so ist $f(\Omega)$ eine Teilmenge der um c verschobenen imaginären Achse. Diese ist niemals offen, also kein Gebiet. Verneinung des Offenheitssatzes liefert die Konstanz von f.
Völlig analog verfährt man bei $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{const}$.
Ist $|f|=c$ so ist $f(\Omega)$ Teilmenge von $\partial B_c(0)$. Auch diese liegt nicht offen in $\mathbb{C}$.

8 Schwarzsches Lemma / Spiegelungsprinzip

Es seien

$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$, $\mathbb{H}_+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$, $\mathbb{H}_- := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) < 0\}$, $\mathbb{E} := B_1(0)$

Schwarzsches Lemma: Es sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ holomorph mit $f(0) = 0$. Dann gilt:

(i) $\forall z \in \mathbb{E} : |f(z)| \leq |z|$

(ii) $|f'(0)| \leq 1$

(iii) Existiert ein Punkt $a \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ mit $|f(a)| = |a|$ oder gilt $|f'(0)| = 1$, dann ist f eine Drehung um 0, d.h. es existiert ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$, sodass $\forall z \in \mathbb{E} : f(z) = \lambda z$.

Beweis: Da $f(0) = 0$ ist die Funktion $g : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & \text{,falls } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{,falls } z = 0 \end{cases}$$

holomorph. Nach Voraussetzung ist $|f(z)| < 1$. Es sei nun $0 < r < 1$ beliebig gewählt. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{E}$ mit $|z| = r$:

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} < \frac{1}{r}$$

Daraus folgt mit dem Maximumprinzip, dass

$$\forall z \in \overline{B}_r(0) : |g(z)| < \frac{1}{r} \text{ und } \lim_{|z| \to 1} |g(z)| \leq \lim_{r \to 1} \frac{1}{r} = 1$$

Daraus folgen die Aussagen (i) und (ii).

Es existiere ein Punkt $a \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ mit $|f(a)| = |a|$ oder es gelte $|f'(0)| = 1$. Dann nimmt die Funktion g auf der offenen Menge $\mathbb{E}$ ihr Maximum 1 an. Nach dem Maximumprinzip folgt, dass g damit konstant ist. Es gilt also $g(z) = \lambda$ mit $|\lambda| = 1$. Also ist $f(z) = \lambda z$. Das ist die Behauptung (iii).

Satz (Schwarzsches Spiegelungsprinzip): Es sei $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ stetig und in $\mathbb{H}_+$ holomorph. Ferner sei $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Dann existiert genau eine holomorphe Fortsetzung $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ von f, welche man erhält durch:

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & \text{,falls } z \in \mathbb{H} \\ \overline{f(\overline{z})} & \text{,falls } z \in \mathbb{H}_- \end{cases}$$

9 Komplexer Logarithmus

9.1 Polarkoordinaten

Vorab zunächst einige grundsätzliche Bemerkungen zur Notation komplexer Zahlen. Wir bezeichnen mit $P:\mathbb{R}_{>0}\times]-\pi,\pi]\to\mathbb{C}^\times$

$$(r,\varphi)\mapsto r\left(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)\right)$$

die komplexe Polarkoordinaten-Abbildung. Wir hätten gerne eine möglichst einfache Beschreibung der Umkehrabbildung.

Mit dem komplexen Betrag $|\ |:\mathbb{C}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, $z\mapsto\sqrt{\operatorname{Re}(z)^2+\operatorname{Im}(z)^2}$ ist die eine Komponente der Umkehrung von P bereits gefunden. Es bleibt einzig das Problem einer komplexen Zahl einen „Winkel" zuzuordnen. Dabei denkt man vielleicht zunächst an Winkel aus der linearen Algebra:

Def.: Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $V^\times:=V\setminus\{0\}$ und $\langle\_,\_\rangle:V\times V\to\mathbb{R}$ ein Skalarprodukt. Dann heißt $\measuredangle:V^\times\times V^\times\to[0,\pi]$

$$(v,w)\mapsto\operatorname{Arccos}\left(\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\|w\|}\right)$$

(Hilbert-)Winkel zwischen v und w.

Die Winkelfunktion ist wohldefiniert: Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung liefert zunächst

$$|\langle v,w\rangle|\leq\|v\|\|w\|\Rightarrow\frac{|\langle v,w\rangle|}{\|v\|\|w\|}\leq 1\Rightarrow\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\|w\|}\in[-1,1]$$

Aus der Analysis I ist bekannt, dass $\cos:[0,\pi]\to[-1,1]$ bijektiv ist und daher $\operatorname{Arccos}:[-1,1]\to[0,\pi]$.

Problem dabei: Dieser Winkel misst immer den *Innenwinkel* zwischen v und w, weil $\measuredangle(v,w)$ ja niemals größer als π werden kann. Angewandt auf den $\mathbb{R}$-V.R. $\mathbb{C}$ könnten wir damit den *Winkel* einer komplexen Zahl $z\in\mathbb{C}^\times$ definieren als

$$\measuredangle(z):=\measuredangle(z,1)$$

Dieser würde aber etwa für $1+i$ und $1-i$ beides mal $\frac{\pi}{4}$ liefern. Die Lösung für dieses Dilemma besteht in einer Orientierung des Winkels. Leider müssen wir dafür eine Fallunterscheidung in Kauf nehmen:

Def.(Argument): Die Funktion $\arg:\mathbb{C}^\times\to]-\pi,\pi]$

$$z\mapsto\begin{cases}\measuredangle(z)=\arccos\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right) & \text{,falls } \operatorname{Im}(z)\geq 0\\ -\measuredangle(z)=-\arccos\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right) & \text{,falls } \operatorname{Im}(z)<0\end{cases}$$

heiß *Argumentfunktion.*

Es ist dann $\arg|_{\mathbb{S}^1}$ bijektiv, aber kein Homöomorphismus.

Es ist $P:\mathbb{R}_{>0}\times]-\pi,\pi]\to\mathbb{C}^\times$ bijektiv und die Umkehrung ist gegeben durch

$$z\mapsto(|z|,\arg(z))$$

9.2 Hauptzweig

Notation: Im Folgenden bezeichnen wir mit $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{>0}$ die reelle Exponentialfunktion. Diese ist bijektiv und wir nennen $\ln:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ die reelle Logarithmusfunktion.
Die Funktionen $\exp,\sin,\cos$ können über die Potenzreihendarstellung problemlos zu Funktionen $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ erweitert werden, welche ebenfalls so bezeichnet werden. Sie haben allerdings grundlegend andere Eigenschaften.

Def. (komplexer Logarithmus): Für ein beliebiges $z\in\mathbb{C}$ heißt ein

$$y\in\exp^{-1}(\{z\})\Leftrightarrow e^y=z$$

Logarithmus von z.

Satz: Sei $z\in\mathbb{C}^\times$ und $r:=|z|$, $\varphi:=\arg(z)$. Dann ist

$$\exp^{-1}(\{z\})=\{y\in\mathbb{C}\mid y=\ln(r)+i\cdot(\varphi+2\pi k),k\in\mathbb{Z}\}$$

Die Zahl $z=0$ besitzt keine Logarithmen.

Beweis: Sei $z\neq 0$.
„$\subset$“: Es sei $y=y_1+iy_2\in\exp^{-1}(\{z\})$. Dann gilt also

$$e^{y_1}e^{iy_2}=e^y=z=re^{i\varphi}$$

Durch Übergang zum Betrag erhalten wir einerseits

$$\left|e^{y_1}e^{iy_2}\right|=\left|re^{i\varphi}\right|\Rightarrow r=e^{y_1}\Rightarrow y_1=\ln(r)$$

und andererseits

$$e^{iy_2}=e^{i\varphi}\Rightarrow 1=e^{i(y_2-\varphi)}=\cos(y_2-\varphi)+i\sin(y_2-\varphi)$$

Also ist

$$1=\mathrm{Re}(1)=\cos(y_2-\varphi)\Rightarrow y_2-\varphi\in 2\pi\mathbb{Z}$$

„$\supset$“: Umgekehrt gilt für jedes $k\in\mathbb{Z}$

$$\exp(\ln(r)+i(\varphi+2\pi k))=\exp(\ln(r))\cdot\exp(i\varphi)\exp(2i\pi k)=re^{i\varphi}=z$$

Sei $z=0$: Angenommen, es gäbe ein $y\in\mathbb{C}$, sodass

$$0=\exp(y)\Rightarrow 0=|\exp(y)|=|\exp(y_1+iy_2)|=\exp(y_1)>0$$

Widerspruch!

Definition: $\log:\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\leq 0}\to\mathbb{C}$ mit $\log(z):=\ln(|z|)+i\arg(z)$ heißt *Hauptzweig des Logarithmus.*

Satz: Der Hauptzweig des Logarithmus $\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$ ist stetig in seinem Definitionsbereich. Die Fortsetzung $\mathrm{l} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ ist unstetig auf $\mathbb{R}_{<0}$.

Beweis: Die Stetigkeit von $\log$ ergibt sich wie folgt: Aus der reellen Analysis wissen wir, dass $\ln$ stetig ist. Folglich muss nur noch die Funktion $\arg$ auf Stetigkeit untersucht werden. Für diese gilt

$$\arg(z) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right) & \text{,falls } \mathrm{Im}(z) \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right) & \text{,falls } \mathrm{Im}(z) < 0 \end{cases}$$

Hieraus folgt sofort die Stetigkeit von $\arg$ innerhalb der beiden Fälle. Für eine Zahl z mit $\mathrm{Im}(z) = 0$ ergibt sich, da $z \notin \mathbb{R}_{<0}$:

$$\arccos\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right) = \arccos\left(\frac{z}{z}\right) = \arccos(1) = 0 = -0 = -\arccos\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right)$$

Also ist $\arg$ und damit $\log$ stetig.

Sei $z \in \mathbb{R}_{<0}$. Dann ist $l(z) = \ln(|z|) + i\arg(z) = \ln(|z|) + i\pi$. Wir definieren die Folge $z_n := |z| e^{\pi\left(1+\frac{1}{n}\right)i}$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = |z| e^{\pi i} = -|z| = z$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\arg(z_n) = \arg\left(e^{\pi\left(1+\frac{1}{n}\right)i}\right) = \pi + \tfrac{\pi}{n} - 2\pi = -\pi + \tfrac{\pi}{n}$$

Also gilt:

$$\lim_{n\to\infty} l(z_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\ln(|z|) + i\left(\tfrac{\pi}{n} - \pi\right)\right) = \ln(|z|) - i\pi \neq \ln(|z|) + i\pi = l(z)$$

Folglich ist l unstetig

Satz: Es gibt keine stetige Funktion $g : \mathbb{C}^{\times} \to \mathbb{C}$ mit $\exp \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{\times}}$.

Beweis: Angenommen, es gäbe ein solches g. Dann definiere die Funktion $f := g - l$ mit $l : \mathbb{C}^{\times} \to \mathbb{C}$ wie im vorherigen Satz. Dann gilt

$$\forall z \in \mathbb{C}^{\times} : e^{f(z)} = e^{g(z)} e^{-l(z)} = \tfrac{z}{z} = 1$$

Es existiert also eine wohldefinierte Funktion $k : \mathbb{C}^{\times} \to \mathbb{Z}$ mit $f(z) = 2\pi i \cdot k(z)$. Weil nach Voraussetzung f stetig ist auf $U := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, folgt dass auch $2\pi i \cdot k$ dort stetig sein muss. Dies jedoch impliziert, dass k konstant ist, d.h. es ein gibt ein $k_1 \in \mathbb{Z}$, sodass $\forall z \in \mathbb{C}^{\times} : k(z) = k_1$. (Bei ganzzahligen Funktionswerten von k wäre sonst Stetigkeit verletzt.) Also ist $f(z) = 2\pi i k_1$ und damit

$$g = f + l = 2\pi i k_1 + l \text{ auf } U$$

Da aber l unstetig auf $\mathbb{R}_{<0}$ ist, folgt für ein $z_0 \in \mathbb{R}_{<0}$ beliebig

$$\lim_{z \to z_0} g(z) = 2\pi i k_1 + l(z) \neq 2\pi i k_1 + l(z_0) = g(z_0)$$

Also ist auch g dort unstetig. Widerspruch!

Satz: Der Hauptzweig $\log:\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{C}$ ist holomorph und es gilt, dass

$$\log'(z)=\frac{1}{z}$$

Beweis: Wir wollen das direkt mittels Wirtinger-Kalkül nachrechnen. Betrachtet man die Definition

$$\log(z)=\ln(|z|)+i\arg(z)$$

so gilt für den Realteil

$$\nabla\ln(|z|)=\frac{1}{|z|}\frac{z}{|z|}=\frac{z}{|z|^2}$$

Für den Imaginärteil sei daran erinnert, dass für $\operatorname{Arccos}:[-1,1]\to[0,\pi]$ gilt

$$\operatorname{Arccos}'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Es ergibt sich somit, dass

$$\partial_1\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right)\right)=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{z_1}{|z|}\right)^2}}\left(\frac{|z|-\frac{z_1^2}{|z|}}{|z|^2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{\frac{|z|^2-z_1^2}{|z|^2}}}\frac{|z|^2-z_1^2}{|z|^3}$$

$$=-\frac{|z|^2-z_1^2}{|z|^2\sqrt{|z|^2-z_1^2}}=-\frac{\sqrt{|z|^2-z_1^2}}{|z|^2}=-\frac{\sqrt{z_1^2+z_2^2-z_1^2}}{|z|^2}=-\frac{|z_2|}{|z|^2}$$

$$\partial_2\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right)\right)=\frac{z_1}{\sqrt{1-\left(\frac{z_1}{|z|}\right)^2}}|z|^{-2}\frac{z_2}{|z|}=\frac{z_1z_2}{|z|^3\sqrt{\frac{|z|^2-z_1^2}{|z|^2}}}=\frac{z_1z_2}{|z|^3}\frac{|z|}{\sqrt{|z|^2-z_1^2}}$$

$$=\frac{z_1z_2}{|z|^2\sqrt{|z|^2-z_1^2}}=\frac{z_1z_2}{|z|^2\sqrt{z_1^2+z_2^2-z_1^2}}=\frac{z_1}{|z|^2}\operatorname{sgn}(z_2)$$

und daher

$$\nabla\arg(z)=\begin{pmatrix}-\frac{|z_2|}{|z|^2}\operatorname{sgn}(z_2) & \frac{z_1}{|z|^2}\operatorname{sgn}(z_2)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{z_2}{|z|^2} & \frac{z_1}{|z|^2}\end{pmatrix}$$

Das liefert für die Wirtinger-Ableitungen

$$2\bar\partial\log(z)=\left(\frac{z_1}{|z|^2}-\frac{z_1}{|z|^2}\right)+i\left(-\frac{z_2}{|z|^2}+\frac{z_2}{|z|^2}\right)=0$$

$$\partial\log(z)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{z_1}{|z|^2}+\frac{z_1}{|z|^2}\right)+i\left(-\frac{z_2}{|z|^2}-\frac{z_2}{|z|^2}\right)\right)=\frac{z_1}{|z|^2}-i\frac{z_2}{|z|^2}=\frac{\bar z}{|z|^2}=\frac{\bar z z}{|z|^2 z}=\frac{1}{z}$$

Satz: Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend. Es sei $f \in \mathcal{O}^\times(U)$ eine nullstellenfreie holomorphe Funktion. Dann existiert eine holomorphe Logarithmusfunktion von f, d.h. es gilt

$$\exists g \in \mathcal{O}(U) : \exp \circ g = f$$

Beweis:
Weil f nullstellenfrei ist, folgt $f'/f \in \mathcal{O}(U)$. Es sei Φ eine Stammfunktion von f'/f. Dann gilt:

$$\left(f \cdot \exp(-\Phi)\right)' = f' \cdot \exp(-\Phi) - f \cdot \exp(-\Phi) \cdot \Phi' = \exp(-\Phi)\left(f' - f \cdot \frac{f'}{f}\right) = 0$$

Also gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{C}^\times$, sodass: $f \cdot \exp(-\Phi) = c \Rightarrow f = c \cdot \exp(\Phi)$. Ist nun γ ein Logarithmus von c so folgt: $f = \exp(\gamma + \Phi)$. Definiere also $g : U \to \mathbb{C}$ durch $z \mapsto \Phi(z) + \gamma$.

Satz: Alle Schwingungen sind konstant, d.h.

$$\forall x \in \mathbb{R} : \cos(x) = 1$$

Beweis:

$$\cos(x) = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{2\pi i x}\right) = \mathrm{Re}\left(\left(e^{2\pi i}\right)^x\right) = \mathrm{Re}\left(1^x\right) = \mathrm{Re}(1) = 1$$

Def: Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Dann heißt

$$\mathrm{Li}_n(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}$$

Polylogarithmus.