Ergänzungen zur Analysis

Nikolai Nowaczyk

2009

Contents

1 Vollständigkeit reeller Zahlen

Die Menge K sei bis zu dieser Stelle bereits charakterisiert durch die Körperaxiome und die Anordnungsaxiome.

1.1 Vorgeplänkel

1.1 Definition (Beschränktheit)**.** Es sei $M \subset K$. Dann heißt M

(i) *nach oben beschränkt* $:\Leftrightarrow \exists s \in K : \forall x \in M : x \leq s$

(ii) *nach unten beschränkt* $:\Leftrightarrow \exists s \in K : \forall x \in M : s \leq x$

(iii) *beschränkt*, falls M nach oben und unten beschränkt ist.

Die Zahl s bezeichnet man auch als *obere / untere Schanke.*

1.2 Definition (Infimum/Supremum)**.** Es sei $M \subset K$. Ein $s \in K$ heißt *kleinste obere Schranke* von M, falls gilt:

$$\forall t \in K : t < s \Rightarrow \exists x \in M : x > t$$

Ein solches s heißt *Supremum von M* und wird mit

$$\sup(M) := s$$

Notiert.
Analog heißt ein $u \in K$ *größte untere Schranke* von M, falls gilt:

$$\forall t \in K : t > u \Rightarrow \exists x \in M : x < t$$

Ein solches u heißt *Infimum* von M und wird mit

$$\inf(M)$$

notiert.

1.3 Lemma. Sei $M \subset K$ eine Menge.

(i) Falls M ein Supremum besitzt, so ist dieses eindeutig bestimmt.

(ii) Falls M ein Infimum besitzt, so ist dieses eindeutig bestimmt.

1.4 Definition (Minimum / Maximum)**.** Es sei $M \subset K$.

(i) Ein Supremum $\sup(M)$ von M heißt *Maximum* von M, falls $\sup(M) \in M$. In diesem Fall notieren wir
$$\max(M) := \sup(M)$$

(ii) Ein Infimum $\inf(M)$ von M heißt *Minimum* von M, falls $\inf(M) \in M$. In diesem Fall notieren wir
$$\min(M) := \inf(M)$$

1.5 Definition (Konvergenz)**.** Eine Zahlenfolge $(a_n) \in K^{\mathbb{N}}$ heißt *konvergent*, falls gilt

$$\exists a \in K : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$$

Die Zahl $a \in K$ heißt Grenzwert von (a_n) und wird mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n := a$$

notiert.

1.6 Lemma. (Eindeutigkeit des Limes) Eine Folge hat höchstens einen Grenzwert.

Beweis. Es seien $a, b \in K$ Grenzwerte der Folge (a_n). Angenommen es gilt $a \neq b$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $|a - b| = \varepsilon$. Aus der Konvergenzdefinition folgt

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2 : |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dann folgt für ein beliebiges $n \geq \max\{N_1, N_2\}$:

$$\varepsilon = |a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Also $\varepsilon < \varepsilon$. Widerspruch! □

1.7 Lemma. (Größenvergleich konvergenter Folgen) Es seien $(a_n), (b_n) \in K^{\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit
$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n$$
Dann ist auch
$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$$
Außerdem gilt für beliebige $A, B \in K$, $A \leq B$, und eine beliebige konvergente Folge (x_n):

$$\forall n \in \mathbb{N} : A \leq x_n \leq B \Rightarrow A \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq B$$

Beweis. Durch Übergang zur Differenzenfolge $(b_n - a_n)$ genügt es zu zeigen, dass gilt: Ist (c_n) eine konvergente Folge, so gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : c_n \geq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n \geq 0$$

Angenommen, dies wäre nicht der Fall: Dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$, sodass

$$\lim_{n\to\infty} c_n = -\varepsilon$$

Nach Definition der Konvergenz gäbe es aber auch ein $N \in \mathbb{N}$

$$\forall n \geq N : |c_n - (-\varepsilon)| < \varepsilon$$

Daraus folgt

$$\forall n \geq N : c_n < 0$$

im Widerspruch zur Definition von (c_n).
Die zweite Aussage folgt durch doppelte Anwendung des bisher Bewiesenen auf die konstante Folge A und (x_n) bzw. (x_n) und die konstante Folge B. □

1.8 Definition (Cauchy-Folge)**.** Eine Zahlenfolge $(a_n) \in K^{\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

1.9 Definition (Teilfolge)**.** Es sei $(a_n) \in K^{\mathbb{N}}$ eine Folge und $\Lambda \subset \mathbb{N}$ eine unendliche Teilmenge. Dann heißt $(a_n) \in K^{\Lambda}$ Teilfolge von (a_n). Mit $\Lambda = \{n_1 < n_2 < \dots\}$ notieren wir auch $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} := (a_n)_{n\in\Lambda}$.

1.10 Definition (Intervall)**.** Es seien $a, b \in K$ mit $a < b$. Dann heißt die Menge

$$I := [a, b] := \{x \in K | a \leq x \leq b\}$$

abgeschlossenes Intervall. Die Zahl $\mathrm{diam}(I) := b - a$ heißt *Länge* oder *Durchmesser* von I.

1.11 Definition (Intervallschachtelung)**.** Es seien $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ eine Folge von abgeschlossenen Intervallen mit den Eigenschaften

(i) $\forall n \in \mathbb{N} : I_{n+1} \subset I_n$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}(I_n) = 0$

Dann heißt (I_n) Intervallschachtelung. Falls eine Zahl $s \in K$ existiert mit $\forall n \in \mathbb{N} : s \in I_n$, so heißt diese Zahl Schachtelungszahl.

1.12 Lemma. Eine Intervallschachtelung besitzt höchstens eine Schachtelungszahl.

Beweis. Die Intervallschachtelung (I_n) besitze ein Schachtelungszahlen $t, s \in K$. Für diese muss nach Definition gelten

$$t, s \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n =: D$$

Da der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Intervalle abgeschlossen ist, ist D ein abgeschlossenes Intervall. Aus den Eigenschaften i),ii) folgt, dass $\mathrm{diam}(D) = 0$. Also ist D von der Form $D = [s, s] = \{s\}$ und aus $t \in D$ folgt $s = t$. □

1.13 Definition (Dedekindscher Schnitt)**.** Es seien $A, B \subset K$. Dann heißt das Tupel (A, B) *Dedekindscher Schnitt*, falls gilt:

(i) $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$

(ii) $A \cup B = K$

(iii) $A \cap B = \emptyset$

(iv) $\forall x \in A : \forall y \in B : x < y$

Falls eine Zahl $s \in K$ existiert mit $\forall x \in A : \forall y \in B : x \leq s \leq y$, so heißt s *Schnittzahl zum Dedekindschen Schnitt* (A, B).

1.14 Lemma. Die Schnittzahl eines Dedekindschen Schnittes ist eindeutig, falls sie existiert.

Beweis. Angenommen, es gäbe zwei verschiedene Schnittzahlen $s \neq t \in K$ zu (A, B). Dann können wir o.E. annehmen, dass $t < s$. Es gilt dann also gleichzeitig:

$$\forall x \in A : \forall y \in B : x \leq s \leq y \text{ und } \forall x \in A : \forall y \in B : x \leq t \leq y \text{ und } t < s$$

Es sei $\alpha \in]t, s[\neq \emptyset$, d.h. $t < \alpha < s$. Da $K = A \cup B$ gilt entweder $\alpha \in A$ oder $\alpha \in B$. Falls $\alpha \in A$, so folgt insgesamt

$$t < \alpha \leq t \Rightarrow t < t$$

Widerspruch! Falls $\alpha \in B$ so folgt insgesamt

$$s \leq \alpha < s \Rightarrow s < s$$

Widerspruch! Folglich ist die Schnittzahl eindeutig. □

1.2 Charakterisierungen von Vollständigkeit

1.15 Satz (Äquivalenz der dunklen Axiome)**.** Es sei K ein angeordneter Körper. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(S) Jede nach oben beschränkte nicht-leere Menge reeller Zahlen besitzt ein Supremum. *(Supremumseigenschaft).*

(C),(A) Jede Cauchy-Folge konvergiert *(Cauchy-Kriterium)*; es gilt zusätzlich $\forall x, y \in K^+ \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$ *(Archimedische Axiom).*

(I) Jede Intervallschachtelung besitzt genau eine Schachtelungszahl *(Intervallschachtelungsprinzip).*

(B) Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge *(Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft).*

(D) Jeder Dedekindsche Schnitt besitzt genau eine Schnittzahl *(Dedekindsches Schnittaxiom).*

Beweis. Ein klassischer Ringschluss aller Aussagen ist mir leider nicht gelungen. Daher greife ich zu folgendem Schema:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \text{(C),(A)} & & \\ & & & & \Downarrow & & \\ \text{(A)} & \Leftarrow & \text{(S)} & \Rightarrow & \text{(I)} & \Rightarrow & \text{(C)} \\ & & \Uparrow & & \Downarrow & & \\ & & \text{(D)} & \Leftarrow & \text{(B)} & & \end{array}$$

Man mache sich zunächst klar, dass das überhaupt eine zulässige Beweisstrategie ist: Wir zeigen die Äquivalenz von (S),(I),(B),(D) durch einen klassischen Ringschluss. Die noch fehlende Implikation (S)$\Rightarrow$ (C),(A) zeigen wir, indem wir separat (S)$\Rightarrow$ (A) beweisen und dann (I)$\Rightarrow$ (C). Denn dann gilt auch (S)$\Rightarrow$ (I)$\Rightarrow$(C), also insgesamt (S)$\Rightarrow$ (C),(A). Der separate Beweis der letzten Implikation (C),(A)$\Rightarrow$(I) komplettiert schließlich den Beweis.
Wir zeigen nur alle Existenzaussagen, da die Eindeutigkeitsaussagen bereits in den Lemmata zur Definition der jeweiligen Begriffe bereits gezeigt wurden.

(S)$\Rightarrow$(I): Wir benötigen ein

Lemma (L): Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende und nach oben beschränkte Folge, so konvergiert (x_n) und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\}$$

Beweis von (L): Sei x_n wie gefordert. Dann ist die der Folge unterliegende Menge $\{x_n|n\in\mathbb{N}\}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Nach (S) besitzt die Menge also ein Supremum $s := \sup\{x_n|n\in\mathbb{N}\}$. Das bedeutet nichts anderes als dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $s - \varepsilon < x_N$. Daraus folgt wegen der Monotonie aber sofort, dass $\forall n \geq N : s - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq s$. Also liegen in $I_\varepsilon(s) = \{x \in K|\,|s-x| < \varepsilon\}$ fast alle Folgenglieder von (x_n) und somit konvergiert (x_n) gegen s.

Beweis der Aussage: Es sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung und die Intervalle seien von der Form $I_n := [a_n, b_n]$. Nach Definition der Intervallschachtelung gilt $\forall n \in \mathbb{N} : I_{n+1} \subset I_n$. Daraus folgt sofort, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der linken Randpunkte monoton steigend ist. Sie ist aber auch beschränkt, da $\forall n \in \mathbb{N} : I_n \subset I_0 = [a_0, b_0]$. Nach dem soeben bewiesenen Lemma (L) existiert also $s := \lim_{n\to\infty} a_n$. Es bleibt zu zeigen, dass $\forall n \in \mathbb{N} : s \in I_n$. Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt für alle $k \geq n$, dass$a_n \leq a_k \leq b_k \leq b_n$,weil auch für alle $k \geq n$ gilt $I_{k+1} \subset I_k$. Mit dem Lemma über den Größenvergleich konvergenter Folgen folgt daraus, dass $a_n \leq s \leq b_n \Leftrightarrow s \in I_n$. Also gilt wie gefordert $\forall n \in \mathbb{N} : s \in I_n$.

(I)⇒(B): Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Zahlenfolge. Dann existiert ein Intervall $I_0 := [a_0, b_0]$, sodass die gesamte Folge in I_0 enthalten ist. Dann enthält I_0 also unendlich viele Folgenglieder. Wir konstruieren nun induktiv eine Folge von Intervallen nach folgendem Prinzip: Gegeben sei ein Intervall I_n. Dann berechnen wir dessen Mittelpunkt $m_n := (a_n + b_n)/2$. Da das Intervall I_n unendlich viele Folgenglieder enthält muss dann entweder $[a_n, m_n]$ oder $[m_n, b_n]$ ebenfalls unendlich viele Folgenglieder enthalten. Im ersten Fall setzen wir $I_{n+1} := [a_n, m_n]$, ansonsten $I_{n+1} := [m_n, b_n]$. Die so konstruierte Folge von Intervallen hat die Eigenschaften:

(i) $\forall n \in \mathbb{N} : I_{n+1} \subset I_n$
(ii) $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(I_n) = \operatorname{diam}(I_0) \cdot \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$
(iii) in jedem I_n liegen unendlich viele Folgenglieder.

Aus (I) folgt nun, dass es einen Punkt $s \in K$ gibt mit $\forall n \in \mathbb{N} : s \in I_n$. Wählt man nun aus jedem Intervall I_k einen Punkt a_k aus, so erhält man eine unendliche Indexmenge $\Lambda \subset \mathbb{N}$ und eine Teilfolge $(a_k)_{k\in\Lambda}$ welche nach Konstruktion gegen s konvergieren muss. Denn für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es wegen (ii) ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\forall k \geq N : a_k \in I_N \subset I_\varepsilon(s)$.

(B)⇒(D): Es sei (A, B) ein Dedekindscher Schnitt. Dann existieren Zahlen $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$. Definiere $I_0 := [a_0, b_0]$ Wir konstruieren nun induktiv eine Intervallschachtelung, indem wir I_{n+1} aus I_n wie folgt definieren: Für $I_n = [a_n, b_n]$ berechne den Mittelpunkt $m_n := (a_n + b_n)/2$. Falls $m_n \in A$ setze $I_{n+1} := [m_n, b_n]$, falls nicht setze $I_{n+1} := [a_n, m_n]$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der linken Randpunkte ist dann monoton steigend. Ferner gilt nach Konstruktion

$$(*)\, \forall n \in \mathbb{N} : I_{n+1} \subset I_n$$

woraus folgt, dass $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \in I_0$. Also ist (a_n) beschränkt und besitzt nach (B) eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $s := \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$. Es sei nun $x \in A$, dann gilt $x \leq s$: Denn würde $x > s$ gelten, so gäbe es wegen $(*)$ und $\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam}(I_{n_k}) = 0$, ein $K \in \mathbb{N}$, sodass $\forall k \geq K$ gilt: $x \notin I_k$, also insbesondere $b_{n_K} < x$. Da aber nach Konstruktion $b_{n_K} \in B$ wäre dies ein Widerspruch zur Definition des Dedekindschen Schnittes. Für $y \in B$ argumentieren wir völlig analog: Wäre $y < s$, so gäbe es ein $K \in \mathbb{N}$ mit $\forall k \geq K\ x \notin I_k$. Also insbesondere $y < a_{n_K} \in A$ im Widerspruch zur Definition des Dedekindschen Schnittes. Folglich gilt insgesamt: $\forall x \in A \forall y \in B : x \leq s \leq y$, d.h. s ist Schnittzahl zu (A, B).

(D)⇒(S): Es sei $M \subset K$ nicht-leer und nach oben beschränkt. Dann existiert eine obere Schranke von M und somit ist die Menge$B := \{y \in K | y \text{ ist obere Schranke von } M\}$ nicht leer. Weil M nach oben beschränkt ist, ist B nach unten beschränkt und somit $B \neq K$. Also ist auch die Menge $A := K \backslash B$ nicht leer und es gilt nach Konstruktion $K = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ und $\forall x \in A \forall y \in B : x < y$ Denn für ein beliebiges $x \in A$ gilt: x ist keine obere Schranke von M, d.h. es existiert ein $m \in M$ mit $m > x$ und folglich ist $\forall y \in B : x < m \leq y$. Also ist (A, B) ein Dedekindscher Schnitt. Nach (D) existiert zu (A, B) eine Schnittzahl $s \in K$ mit

$$(*) \, \forall x \in A \forall y \in B : x \leq s \leq y$$

Wir zeigen nun, dass s ist das gesuchte Supremum ist. Dazu machen wir uns klar: Da K disjunkte Vereinigung von A und B, gilt

$$y \in B \Leftrightarrow \forall x \in A : x < y \text{ und } x \in A \Leftrightarrow \forall y \in B : x < y$$

Zumindest ist s obere Schranke von M: Angenommen, s wäre nicht obere Schranke von M. Dann gäbe es ein $m \in M$, sodass $m > s$. Also gäbe es ein $\varepsilon > 0$, sodass mit $y_0 := s + \frac{\varepsilon}{2}$ gilt $s < y_0 < m$. Daraus folgt aber mittels $(*)$

$$\forall x \in A : x \leq s < y_0 \Rightarrow y_0 \in B$$

Also ist gleichzeitig y_0 obere Schranke von M und es gilt $m > y_0$. Widerspruch! Also ist s obere Schranke von M.
Völlig analog zeigen wir, dass s auch kleinste obere Schranke von M ist: Wäre dem nicht so, gäbe es ein $\varepsilon > 0$, sodass $s - \varepsilon$ schon obere Schranke von M wäre. Mit $x_0 := s - \frac{\varepsilon}{2}$ würde dann gelten: $s - \varepsilon < x_0 < s$. Also gilt wieder mittels $(*)$

$$\forall y \in B : x_0 < s \leq y \Rightarrow x_0 \in A$$

Also ist x_0 nicht obere Schranke von$M$, d.h. es existiert $m \in M$, sodass $m > x_0$. Daraus folgt aber $s - \varepsilon < x_0 < m$, was bedeutet, dass auch $s - \varepsilon$ nicht obere Schranke von M sein kann. Widerspruch!

(I)⇒(C): Es sei $(a_n) \in K^{\mathbb{N}}$ eine vorgegebene Cauchy-Folge. Dann gibt es nach Definition eine Folge von Indizes $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ mit der Eigenschaft, dass

$$\forall n, m \geq n_k : |a_n - a_m| < 2^{-k}$$

Wir definieren die Folge von Intervallen $I_k := \left\{x \in K : |x - a_{n_k}| \leq 2^{-k+1}\right\}$ Dies sind abgeschlossene Intervalle mit der Eigenschaft $I_{k+1} \subset I_k$: Denn für ein $x \in I_{k+1}$ gilt einerseits $\left|x - a_{n_{k+1}}\right| \leq 2^{-k}$. Andererseits gilt sowieso $\left|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}\right| \leq 2^{-k}$, da nach Konstruktion$n_{k+1} > n_k$. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir $\left|x - a_{n_{k+1}}\right| \leq |x - a_{n_k}| + \left|a_{n_k} - a_{n_{k+1}}\right| \leq 2^{-k} + 2^{-k} = 2^{-k+1} \Rightarrow x \in I_k$ Da nach Konstruktion gilt $\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam}(I_k) = 0$, folgt aus (I) die Existenz eines $s \in K$ mit $\forall k \in \mathbb{N} : s \in I_k$. Wir behaupten nun, dass dies der gesuchte Grenzwert für die Cauchy-Folge (a_n) ist: Es folgt zunächst, dass $\forall k \in \mathbb{N} : |s - a_{n_k}| \leq 2^{-k+1}$. Für ein beliebiges $n \geq n_k$ ist aber auch $|a_n - a_{n_k}| < 2^{-k}$ da (a_n) nach Voraussetzung Cauchy-Folge. Für $n \geq n_k$ gilt damit also:

$$|s - a_n| \leq |s - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a_n| < 2^{-k+1} + 2^{-k} < 2^{-k+2} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Daraus folgt aber $\lim_{n\to\infty} a_n = s$.

(S)⇒(A): Aus (S) folgt zunächst, dass $\mathbb{N} \subset K$ nicht nach oben beschränkt ist: Denn wäre $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt, so gäbe es nach (S) eine Zahl $s := \sup(\mathbb{N})$. Aus den Eigenschaften des Supremums folgt, dass $s-1$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$ sein kann. Folglich existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $s-1 \leq n \leq s$. Nach Definition von $\mathbb{N}$ ist nun aber auch $n+1 \in \mathbb{N}$ und offenbar $n+1 > s$ im Widerspruch zur Definition von s. Jetzt zum Beweis von (A): Es seien $x, y \in K$ mit $x, y > 0$. Angenommen, es gäbe nun kein $n \in \mathbb{N}$, sodass $nx > y$. Dann wäre$\forall n \in \mathbb{N} : nx \leq y \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} n \leq yx$ und folglich wäre $\mathbb{N}$ durch y/x beschränkt. Widerspruch!

(C),(A)⇒(I): Es sei $I_n := [a_n, b_n]$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Intervallen mit den geforderten Eigenschaften $I_{n+1} \subset I_n$ und $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(I_n) = 0$. Wir betrachten nun die Folge (a_n) der Linken Randpunkte und zeigen, dass sie eine Cauchy-Folge bilden: Sei $\varepsilon > 0$. Dann folgt aus $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(I_n) = 0$, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\forall n \geq N : \operatorname{diam}(I_n) < \varepsilon$. Es seien nun $n, m \geq N$ beliebig gewählt. Dann folgt induktiv aus der Eigenschaft $\forall n \in \mathbb{N} : I_{n+1} \subset I_n$, dass $a_n \in [a_n, b_n] = I_n \subset I_N$ und $a_m \in [a_m, b_m] = I_m \subset I_N$. Daraus folgt $|a_n - a_m| \leq \operatorname{diam}(I_n) < \varepsilon$. Also sind die (a_n) wie behauptet eine Cauchy-Folge. Gemäß (C) besitzt diese genau einen Grenzwert s.
Die Zahl s hat die gewünschten Eigenschaften: Weil $I_{n+1} \subset I_n$ ist die Folge (a_n) monoton steigend und die Folge (b_n) monoton fallend. Für ein beliebig gewähltes $n \in \mathbb{N}$ gilt daher stets $\forall k \geq n : a_n \leq a_k \leq b_k \leq b_n$, also $\forall k \geq n : a_k \in [a_n, b_n]$. Daraus folgt $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq s \leq b_n$, d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : s \in I_n$. □

2 Theorie der Häufungswerte

Die Grenzwertsätze liefern eine leistungsfähige Konvergenztheorie für Zahlenfolgen, die sich in der Aussage zusammenfassen lässt, dass die Menge aller konvergenten Folgen $\mathbb{K}_k^{\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ eine Unteralgebra bilden. (Für den gesamten Abschnitt sei $\mathbb{K}$ der Körper der komplexen oder reellen Zahlen und $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ der jeweilige Folgenraum). Ferner gilt auch: Jede konvergente Folge ist beschränkt. Oder anders formuliert: Die Menge $\mathbb{K}_k^{\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}_b^{\mathbb{N}}$ der konvergenten Folgen ist Teilmenge der Menge aller beschränkten Folgen. (Sie ist sogar ebenfalls eine Unteralgebra).Ein möglicher Zugang zur Theorie der Häufungswerte ist die Frage, ob die Umkehrung dieses Satzes ebenfalls gilt. Das ist leider nicht der Fall: Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt, $a_n \in [0, 1]$, jedoch offenbar nicht konvergent: Sei $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann ist für $n := N+1$ $|a_n - a_N| = 1 > \varepsilon$. Somit bildet (a_n) keine Cauchy-Folge. Dennoch ist die Untersuchung von beschränkten Folgen sehr fruchtbar. Allerdings erfordert sie eine Abschwächung der in der Konvergenztheorie von Folgen üblichen Begriffe und liefert eine schwächere, aber zugleich auch allgemeinere Theorie.

2.1 Teilfolgen, Häufungswerte

Zunächst schwächen wir den Begriff der Folge zum Begriff der Teilfolge ab:

2.1 Definition (Teilfolge)**.** Sei $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ streng monoton wachsende Folge von Indizes. Dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von (a_n).
Alternativ: Sei $\Lambda \subset \mathbb{N}$ eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$. Dann heißt $(a_n)_{n\in\Lambda}$ Teilfolge.

Dies liefert in natürlicher Weise eine Abschwächung des Konvergenzbegriffes:

2.2 Definition (Häufungswert)**.** Eine Zahl $h \in \mathbb{K}$ heißt Häufungswert von $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, falls es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen h konvergiert.

Es gibt eine alternative Charakterisierung dieser Eigenschaft:

2.3 Lemma (Charakterisierung von Häufungswerten)**.** Es sei $h \in \mathbb{K}$ und $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

(i) h ist Häufungswert von (a_n)

(ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ enthält $B_\varepsilon(h)$ unendlich viele Folgenglieder von (a_n)

(Dabei sei wie immer $B_\varepsilon(h) := \{x \in \mathbb{K} : |x-h| < \varepsilon\}$ und $||$ der Betrag auf K bzw. $\mathbb{C}$.)

Beweis. "$\Rightarrow$": Ist h Häufungswert von (a_n) dann existiert eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = h$. Dann liegen nach Definition von Konvergenz in jedem $B_\varepsilon(h)$ fast alle (a_{n_k}). Dies sind insbesondere unendlich viele Folgenglieder von (a_n).
"$\Leftarrow$": Definiere $\varepsilon_k := \frac{1}{k}$ $(k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ und induktiv eine Folge: In $I_{\varepsilon_1}(h)$ sogar unendlich viele a_n. Wähle irgendein solches $a_{n_1} \in I_{\varepsilon_1}(h)$. $k \to k+1$: In $I_{\varepsilon_{k+1}}(h)$ liegen unendlich viele a_n. Wähle einen Index $n_{k+1} > n_k$, sodass $a_{n_{k+1}} \in I_{\varepsilon_{k+1}}(h)$. Dann ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge mit

$$h = \lim_{k\to\infty} = h - \frac{1}{k} \leq \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \leq \lim_{k\to\infty} = h + \frac{1}{k} = h$$

wegen Sandwichlemma. □

2.2 Bolzano-Weierstraß

Wir sind nun in der Lage die Umkehrung der Aussage "Jede konvergente Folge ist beschränkt" so abzuschwächen, dass sie richtig wird:

2.4 Satz (Bolzano-Weierstraß (Luxus-Version))**.** Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen besitzt einen Häufungswert. Jede Folge reeller Zahlen (a_n) besitzt einen größten Häufungswert h^* mit der Eigenschaft, dass für jedes beliebige $\varepsilon > 0$ gilt:

(i) für fast alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n < h^* + \varepsilon$

(ii) für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$(v) ist $h^* - \varepsilon < a_n$

Analog besitzt (a_n) auch einen kleinsten Häufungswert h_* mit der Eigenschaft, dass für jedes beliebige $\varepsilon > 0$ gilt:

(i) für fast alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n > h_* - \varepsilon$

(ii) für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$(xi) ist $h_* + \varepsilon > a_n$

Beweis. Königsberger I, Kapitel 5.5, S. 50 □

2.5 Korollar. Jede beschränkte Folge komplexer / reeller Zahlen besitzt eine reelle / komplexe konvergente Teilfolge.

Beweis. Dies folgt sofort, indem man die Aussage des Satzes von Bolzano-Weierstraß mit Hilfe des Lemmas über die Charakterisierung von Häufungswerten umformuliert. □

2.6 Definition. (Limes superior / Limes inferior): Es sei $(a_n) \in K_b^{\mathbb{N}}$ eine beliebige beschränkte Folge und es seien h^*, h_* der größte bzw. kleinste Häufungswert. Dann heißen $\limsup_{n\to\infty} a_n := h^*$ bzw. $\liminf_{n\to\infty} a_n := h_*$ der Limes superior bzw. Limes inferior von (a_n).

Konvention: Für unbeschränkte Folgen (a_n) setzt man in Analogie zu bestimmt divergenten Folgen

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \pm\infty \text{ bzw. } \liminf_{n\to\infty} a_n := \pm\infty$$

Die Verwendung des Symbols lim sup mag man zunächst als weniger nahe liegend empfinden. Sie ergibt sich aber in natürlicher Weise aus dem übernächsten Satz, zu dessen Beweis wir zunächst folgendes Lemma zeigen:

2.7 Lemma. Es sei $(a_n) \in K^{\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen und $h \in K$. Dann ist $h = \limsup_{n\to\infty} a_n$ genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Für jedes beliebige $\varepsilon > 0$ gilt:

(i) für fast alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n < h + \varepsilon$

(ii) für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n > h - \varepsilon$

Analog ist $h = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ genau dann, wenn:

(i) für fast alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n > h_* - \varepsilon$

(ii) für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n < h_* + \varepsilon$

Beweis. Die Richtung "$\Rightarrow$" haben wir im Satz von Bolzano-Weierstraß bereits gezeigt.
"$\Leftarrow$": Es gelte (i),(ii). Dann gilt also für jedes $\varepsilon > 0$ und für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$:

$$h - \varepsilon < a_n < h + \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - h < \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - h| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in B_\varepsilon(h)$$

Dies ist nach dem Lemma über die Charakterisierungen von Häufungswerten äquivalent zur Existenz einer Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = h$. Damit ist h immerhin Häufungswert von (a_n).
Angenommen, es gäbe noch einen größeren Häufungswert $h' > h$ von (a_n). Dann wäre also $h' - h =: \delta > 0$. Nach Definition müsste speziell die Umgebung $B_{\delta/2}(h')$ unendlich viele Folgenglieder (a_n) beinhalten. Damit gäbe es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \geq h' - \delta/2 = h + \delta/2$ im Widerspruch zu (i).
Die Aussagen für $\liminf$ ergeben sich wie immer durch Übergang von (a_n) zu $(-a_n)$ unter Anwendung des bisher Bewiesenen. $\square$

2.8 Satz (Charakterisierungen des Limes superior / inferior)**.** Es sei $(a_n) \in K^{\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Definieren wir

$$O_n := \sup_{k\geq n} a_k \text{ bzw. } U_n := \inf_{k\geq n} a_k$$

so gilt für die Folge (O_n), dass sie

(i) monoton fallend, sowie nach unten beschränkt ist und somit konvergiert.

(ii) Ihr Grenzwert erfüllt $\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} a_k = \limsup\limits_{n\to\infty} a_k$

Analog gilt für die Folge (U_n), dass sie

(i) monoton steigend, sowie nach oben beschränkt ist und somit konvergiert.

(ii) Ihr Grenzwert erfüllt $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} a_k = \liminf\limits_{n\to\infty} a_k$

Beweis. Die Folge (O_n) ist aufgrund der Beschränktheit von (a_n) zunächst wirklich wohldefiniert. Aus der Tatsache, dass

$$\sup_{k\geq n+1} a_k = \max\left(a_{n+1}, \sup_{k\geq n} a_k\right) \leq \sup_{k\geq n} a_k$$

folgt direkt die Monotonie von (O_n).
Nach Voraussetzung ist (a_n) beschränkt, d.h. $\exists a < b \in K$mit $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \in [a,b]$. Damit ist auch für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ $O_n = \sup\limits_{k\geq n} a_k \in [a,b]$ und somit ist (O_n) beschränkt. Nach dem Satz von Leibniz zur monotonen Konvergenz existiert damit $h := \lim_{n\to\infty} O_n$ und somit ist (i) gezeigt.
Für Eigenschaft (ii) verwenden wir die Charakterisierung aus dem vorangegangenen Lemma. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\forall n \geq N$ gilt: $|O_n - h| = O_n - h < \varepsilon$ (da (O_n) monoton fallend). Folglich gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $O_n = \sup\limits_{k\geq n} a_k < h + \varepsilon$ und somit folgt $a_k < h + \varepsilon$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$.
Angenommen, es gäbe ein $\varepsilon > 0$, sodass es nur endlich viele n gibt mit $a_n > h - \varepsilon$. Es gäbe dann ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ gilt: $a_n \leq h - \varepsilon$. Damit wäre auch

$$\forall n \geq N : O_n \leq O_N = \sup_{n\geq N} a_n \leq h - \varepsilon$$

Dies impliziert $h = \lim_{n\to\infty} O_n \leq h - \varepsilon < h$. Widerspruch! $\square$

2.3 Grenzwertsätze für Limes superior / inferior

Den Grenzwert einer Folge kann man auffassen als Abbildung $\lim : \mathbb{K}_k^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}$, welche additiv und homogen, sprich linear ist, sowie multiplikativ. Damit ist sie eine Linearform auf $\mathbb{K}_k^{\mathbb{N}}$, ja sogar ein Algebrenhomomorphismus $\mathbb{K}_k^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}$. Analog kann man jetzt die Abbildung $\limsup : K_b^{\mathbb{N}} \to K$ betrachten, welcher jeder reellen beschränkten Zahlenfolge ihren Limes superior zuordnet. Leider hat diese Abbildung erheblich weniger Homomorphieeigenschaften. Sie ist zum Beispiel nicht additiv: Für $a_n := (-1)^n$ und $b_n := (-1)^{n+1}$ gilt nämlich

$$\limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n = 1 + 1 = 2 \neq 0 = \limsup_{n\to\infty} \left((-1)^n + (-1)^{n+1}\right) = \limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n)$$

Die Abbildung ist auch nicht multiplikativ: Für gerades n definiere $a_n := 2$ und $b_n := 2^{-n}$, für ungerades n definieren wir $a_n := 2^{-n}$ und $b_n := 2$. Dann sind beide Folgen beschränkt, jedoch gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n = 2 \cdot 2 = 4 \neq 0 = \limsup_{n\to\infty} \left(2 \cdot 2^{-n}\right) = \limsup_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n)$$

Wir retten nun, was zu retten ist:

2.9 Definition (subadditiv / submultiplikativ)**.** Eine Abbildung $f : D \subset K \to K$ heißt *subadditiv*, falls gilt

$$\forall x, y \in D : x + y \in D \Rightarrow f(x+y) \leq f(x) + f(y)$$

und *submultiplikativ*, falls gilt

$$\forall x, y \in D : xy \in D \Rightarrow f(xy) \leq f(x) f(y)$$

2.10 Satz (Abbildungseigenschaften von Limes superior / inferior)**.** Die Abbildungen $\limsup : K_b^{\mathbb{N}} \to K$ und $\liminf : K_b^{\mathbb{N}} \to K$ sind K-homogen, subadditiv und submultiplikativ, d.h. es gilt für beliebige $(a_n), (b_n) \in K_b^{\mathbb{N}}$:

(i) $\forall \lambda \in K : \limsup_{n\to\infty} (\lambda a_n) = \lambda \cdot \limsup_{n\to\infty} (a_n)$

(ii) $\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} (a_n) + \limsup_{n\to\infty} (b_n)$

(iii) $\limsup_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n$

Für $\liminf$ gelten (i),(ii),(iii) genauso.

Beweis. □

2.4 Zusammenhang mit Häufungspunkten

H Menge der Häufungswerte, dann $\limsup = \sup H$

3 Unendliche Reihen

3.1 Umsortierungen

3.1 Definition (Absolute Konvergenz)**.** Eine Reihe $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ heißt *absolut konvergent*, falls $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

3.2 Lemma. Jede absolut konvergente Reihe konvergiert auch im gewöhnlichen Sinn.

3.3 Definition (Bedingte Konvergenz)**.** Eine Reihe $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ heißt *bedingt konvergent*, falls sie konvergiert, jedoch nicht absolut konvergiert.

3.4 Definition (Symmetrische Gruppe)**.** Für eine beliebige Menge M heißt die Menge S_M aller bijektiven Abbildungen $\tau : M \to M$ *symmetrische Gruppe von* M. Man bezeichnet ihre Elemente auch als Permutationen.

3.5 Definition (Umsortierung)**.** Eine Reihe $(\sum_{k=0}^{\infty} b_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ heißt *Umsortierung* einer Reihe $(\sum_{k=0}^{\infty} a_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, falls es eine Permutation $\tau \in S_{\mathbb{N}}$ gibt, sodass $\forall k \in \mathbb{N} b_k = a_\tau(k)$.

3.6 Satz (Riemannscher Umordnungssatz)**.** Es sei $(\sum_{k=0}^{\infty} a_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine bedingt konvergente Reihe. Dann gilt:

(i) Die Reihe lässt sich so umsortieren, dass sie gegen jeden beliebigen Grenzwert konvergiert: $\forall C \in \mathbb{R} \exists \tau \in S_{\mathbb{N}} : \sum_{k=0}^{\infty} a_{\tau(k)} = C$

(ii) Es existiert ein $\tau \in S_{\mathbb{N}}$, sodass $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\tau(k)} = \infty$.

(iii) Es existiert ein $\tau \in S_{\mathbb{N}}$, sodass $(\sum_{k=0}^{\infty} a_{\tau(k)})$ beschränkt ist, jedoch nicht konvergiert.

Beweis. □

3.2 Konvergenzkriterien

3.7 Satz (Cauchyscher Verdichtungssatz)**.** Es sei $(a_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2k}$ konvergiert.

Beweis. Wir bezeichnen mit $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ bzw. $t_n := \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2k}$ die Partialsummen der jeweiligen Reihen. Wir halten zunächst fest, dass aus der Voraussetzung, dass (a_k) eine monoton fallende Nullfolge ist, direkt folgt, dass $\forall k \in \mathbb{N} : a_k \geq 0$. Daraus folgt wiederum, dass auch $s_n, t_n \geq 0$.

"$\Rightarrow$": Die Monotonie der a_k impliziert

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2k} = \sum_{k=0}^{n} 2 \cdot 2^{k-1} a_{2k} \leq \sum_{k=0}^{n} 2 \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} a_j = 2 \sum_{k=1}^{2^n-1} a_k \leq 2 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n-1} a_k$$

Der letzte Ausdruck existiert nach Voraussetzung. Folglich sind die Partialsummen (t_n) monoton steigend und nach oben beschränkt. Nach dem Satz von Leibniz also konvergent.

"$\Leftarrow$": Es gilt aufgrund der Monotonie von (a_k) für $n \in \mathbb{N}$:

$$s_{2^n-1} - a_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} a_j \leq \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} a_{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^k}$$

Der letzte Ausdruck konvergiert nach Voraussetzung. Daraus folgt, dass auch die Teilfolge (s_{2^n-1}) der Partialsummen konvergiert. Da alle $a_k \geq 0$, ist (s_n) jedoch monoton steigend. Also konvergiert auch die ganze Folge (s_n). □

3.8 Korollar (Riemannsche Zetafunktion)**.** Für $s \in \mathbb{R}_{>0}$ ist die Reihe $\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^s$ divergent, falls $s \in]0,1]$ und konvergent, falls $s \in]1,\infty[$.

Beweis. Mit $\zeta(1)$ erhalten wir die harmonische Reihe, welche bekanntlich divergiert. Für $s \neq 1$ wenden wir obigen Verdichtungssatz an: $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^s$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^s}$ konvergiert und es gilt mittels geometrischer Reihe:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{(2^k)^s} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{2^s}\right)^k = \frac{1 - 2^{(1-s)(n+1)}}{1 - 2^{1-s}}$$

Und der letzte Ausdruck konvergiert genau dann, wenn $2^{1-s} < 1 \Leftrightarrow s > 1$ und divergiert genau dann, wenn $2^{1-s} > 1 \Leftrightarrow s < 1$.

□