Wegealgebren

Nikolai Nowaczyk

04. September 2006

Es sei für den gesamten Text k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

1 Definitionen

Definition 1.1 (Köcher) Ein *Köcher* $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ ist ein Tupel bestehend aus

(i) einer endlichen Menge Q_0 von *Knoten* $1, \dots, n$

(ii) einer endlichen Menge Q_1 von *Pfeilen*

(iii) zwei Abbildungen $s, t : Q_1 \to Q_0$.

Ein Pfeil ρ startet beim Knoten $s(\rho)$ und endet beim Knoten $t(\rho)$.
Notation: $s(\rho) \xrightarrow{\rho} t(\rho)$
Ein Pfeil ρ mit $s(\rho) = t(\rho)$ heißt *Schleife*.

Definition 1.2 (Weg) Wir unterscheiden zwischen trivialen und nicht-trivialen Wegen.

(i) Ein *nicht-trivialer Weg in Q* ist eine Folge von Pfeilen $\rho_1, \dots, \rho_m$ $(m \geq 1)$, für die gilt: $s(\rho_{i+1}) = t(\rho_i)$ $(1 \leq i < m)$. Grafisch dargestellt:

$$\bullet \xleftarrow{\rho_1} \bullet \xleftarrow{\rho_2} \dots \xleftarrow{\rho_m} \bullet$$

(ii) Für jeden Knoten i bezeichnen wir mit e_i den *tivialen Weg*, der bei i startet und endet.

(iii) Die Abbildungen s, t verwenden wir analog zu den Pfeilen auch für Wege.

(iv) Ein Weg x mit $s(x) = t(x)$ heißt *(orientierter) Zyklus* in Q.

(v) Q heißt *zyklenfrei*, wenn es keinen orientierten Zyklus in Q gibt.

Wir notieren eine Folge von Pfeilen von rechts nach links, also in derselben Reihenfolge, in der man die Komposition linearer Abbildungen notiert.

Definition 1.3 (Wegealgebra) Es sei Q ein Köcher und es sei $W := \{\text{Wege in Q}\}$. Die Wege in Q versehen wir nun mit der folgenden Multiplikation:

$$\forall x, y \in W : x \cdot y := \begin{cases} \text{Komposition} & \text{falls } t(y) = s(x), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir definieren ferner eine Vektoraddition, die zwei Wege x, y auf das formale Objekt $x + y$ abbildet, außerdem eine Skalarmultiplikation, die einen Weg x und einen Skalar $\lambda \in k$ auf das Objekt λx abbildet. Mit diesen Operationen ausgestattet heißt dann

$$A := kQ := Lin_k(W)$$

also die Menge aller formalen Linearkombinationen aller Wege in Q über k *Wegealgebra.*

Bemerkungen:

(i) Die so definierte Multiplikation von Wegen ist assoziativ, aber i.A. nicht kommutativ.

(ii) Vektoraddition und Skalarmultiplikation haben keine anschaulichen Entsprechungen im Köcher.

(iii) Auch die 0 hat keine Anschauung im Köcher. Insbesondere ist $0 \notin W$.

(iv) Vektoren $x, y \in A$ bestehen aus formalen Linearkombinationen von Wegen. Die Vektormultiplikation definieren wir dann durch $x \cdot y = (\sum_i \lambda_i w_i) \cdot (\sum_j \mu_j w_j) := \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j w_i w_j$, wobei $\lambda_i, \mu_j \in k$ und $w_i, w_j \in W$.

(v) Nach Konstruktion ist kQ eine k-Algebra, deren Basis aus allen Wegen in Q besteht.

(vi) $(A, +, \cdot)$ bildet einen Ring, der dieselben Elemente enthält wie die Algebra, was bedeutet, dass wir A mit Mitteln der Ring-, Vektorraum-, Moduln- und Algebrentheorie untersuchen können.

2 Beispiele und Bemerkungen

(i) Es sei Q der Köcher $1 \xrightarrow{\rho} 2 \xrightarrow{\sigma} 3$. Dann ist $kQ = Lin_k(e_1, e_2, e_3, \rho, \sigma, \sigma\rho)$. Das Produkt der Wege σ und ρ ist also der Weg $\sigma\rho$. Andererseits ist $\rho\sigma = 0$. Beispiele einiger anderer Multiplikationen sind: $\rho\rho = 0$, $e_1\rho = 0$, $e_2\rho = \rho$, $\rho e_1 = \rho$, $e_3(\sigma\rho) = \sigma\rho$, $e_1e_1 = e_1$, $e_1e_2 = 0$ etc.

(ii) Ist Q der Köcher $1 \xrightarrow{\rho} 1$, besteht Q also nur aus einem einzigen Knoten 1 und einem Pfeil ρ, der bei 1 beginnt und endet (*Schleife*), dann ist $kQ \cong k[X]$. Denn es gibt eine offensichtliche Bijektion durch $k[X] \ni 1 \leftrightarrow e_1$ und $X^n \leftrightarrow \rho^n$ $(n \geq 1)$. Besteht Q aus einem Knoten und r Schleifen, dann ist kQ isomorph zur *freien assoziativen Algebra in r Variablen.*

(iii) Sei Q so beschaffen, dass es zwischen je zwei Knoten immer nur höchstens einen Weg gibt. Dann können wir jedes $x \in kQ$ als Linearkombination $x = \sum_{ij} \lambda_{ij} w_{ij}$ von Wegen

w_{ij} mit $s(w_{ij}) = j$ und $t(w_{ij}) = i$ darstellen ($1 \leq i, j \leq n$). Daher können wir diese Menge dann mit der Unterlagebra

$$C \in M_n(k) : \begin{cases} c_{ij} = \lambda_{ij} & \text{falls es einen Weg von j nach i gibt,} \\ c_{ij} = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

identifizieren.
Hat Q die Form $1 \xrightarrow{\rho_1} 2 \xrightarrow{\rho_2} \ldots \xrightarrow{\rho_n} n$, so erhalten wir die unteren Dreiecksmatrizen.

3 Unterräume, Idempotente Elemente und Zerlegungen

Wir untersuchen formale Eigenschaften der Wegealgebra A.

Satz 3.1 (Unterräume) Folgende Mengen liefern interessante Unterräume:

(i) Ae_i beinhaltet alle Wege, die beim Knoten i starten.

(ii) e_jA beinhaltet alle Wege, die beim Knoten j enden.

(iii) e_jAe_i beinhaltet alle Wege, die beim Knoten i starten und beim Knoten j enden.

(iv) Ae_iA beinhaltet alle Wege, die den Knoten i durchqueren.

(v) Daraus folgt sofort: $e_i \in Ae_jA \Rightarrow i = j$

(vi) Ferner gilt wegen (i),(ii): $0 \neq f \in Ae_i$, $0 \neq g \in e_iA \Rightarrow fg \neq 0$.

Definition 3.1 (frei, unzerlegbar, projektiv) Es sei R ein Ring und M ein R-Modul. Dann heißt M

(i) *frei*, falls $M \cong \oplus_I R$ für eine geeignete Indexmenge I.

(ii) *unzerlegbar*, falls für beliebige R-Moduln M_1,M_2 gilt: $M = M_1 \oplus M_2 \Rightarrow M_1 = \{0\}$ oder $M_2 = \{0\}$.

(iii) *projektiv*, falls M als direkter Summand eines freien R-Moduls in Erscheinung tritt.

Satz 3.2 (Zerlegung der Wegealgebra) Ist A eine Wegealgebra, dann gilt:

(i) $A = \oplus_{i=1}^n Ae_i$, $A = \oplus_{i=1}^n e_iA$

(ii) A ist freies A-Modul.

(iii) Jedes Ae_i ist ein projektives A-Linksmodul.

Beweis:
Es gilt $\forall x \in A \exists w_1, \cdots, w_n : x = \sum_{i=1}^n w_i$, wobei die $w_i \in Ae_i$ Linearkombinationen von Wegen sind, die bei i starten. Eine solche Zerlegung existiert, weil jeder Weg notwendigerweise

irgendwo starten muss. Es gilt ferner $Ae_i \cap Ae_j = \{0\}$ (falls $i \neq j$), denn jeder Weg kann nur an genau einem Knoten starten $\Rightarrow A = \oplus_{i=1}^n Ae_i$. Völlig analog existiert auch die Zerlegung $A = \oplus_{i=1}^n e_i A$.
A ist aufgefasst als A-Modul trivialerweise isomorph zu einer einzigen Kopie seiner selbst aufgefasst als Ring. Also ist A ein freies A-Modul.
Da jedes Ae_i also als direkter Summand des freien A-Moduls A in Erscheinung tritt, sind alle Ae_i nach Definition projektive A-Linksmoduln. □

Definition 3.2 (Idempotenz) Sei R ein Ring, dann

(i) heißt ein $x \in R$ *idempotent*, falls gilt: $x^2 = x$.

(ii) heißen $x, y \in R$ *orthogonal idempotent*, falls x und y idempotent sind und ferner gilt $xy = 0 = yx$.

(iii) heißt $x \in R$ *primitiv idempotent*, falls für beliebige orthogonale idempotente Elemente $x_1, x_2 \in R$ gilt: $x = x_1 + x_2 \Rightarrow x_1 = 0$ oder $x_2 = 0$.

Feststellungen:

(i) Für jedes idempotente $e \in R$ ist auch $(1-e)$ idempotent, denn es gilt: $(1-e) \cdot (1-e) = 1 - e - e + e^2 = 1 - e$. Da ferner $e(1-e) = e - e^2 = 0$, sind e und $(1-e)$ orthogonal idempotent.

(ii) In jedem Ring sind 0 und 1 immer zueinander orthogonale idempotente Elemente.

Satz 3.3 (Idempotenz, Neutralität) Ist A eine Wegealgebra, dann sind die e_i jeweils zueinander orthogonale idempotente Elemente. Ferner besitzt A ein Einselement und zwar ist $1 = \sum_{i=1}^n e_i$.

Beweis:

(i) Idempotenz: $\forall i : e_i^2 = e_i$

(ii) Orthogonalität $\forall i \neq j : e_i \cdot e_j = 0$

(iii) Neutralität: Nach Satz 3.2,(i) besitzt jedes $x \in A$ eine Darstellung $x = \sum_{i=1}^n s_i$ mit $s_i \in Ae_i$. Damit ist $x \cdot 1 = (\sum_{i=1}^n s_i) \cdot (\sum_{j=1}^n e_j) = \sum_{i,j} s_i e_j = \sum_{i=1}^n s_i = x$, denn $s_i e_j = 0$, falls $i \neq j$.
Da x auch eine Darstellung $x = \sum_{i=1}^n t_i$ mit $t_i \in e_i A$ besitzt, folgt daraus folgt analog $1 \cdot x = x$.

□

Satz 3.4 (Zusammenhang Idempotenz / Zerlegbarkeit eines Moduls) Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Dann gilt: M ist genau dann zerlegbar in $M = K \oplus K'$, wenn es einen idempotenten Endomorphismus $e \in End_R(M)$ gibt, sodass $Im(e) = K$ und $Im(1-e) = K'$.

Beweis:
'$\Rightarrow$': Es sei $M = K \oplus K'$. Dann gibt es eine Projektion $e \in End_R(M)$ von M auf K an K'

durch $e|_K = 1_K$ und $e|_{K'} = 0_{K'}$. Somit ist e auf ganz M idempotent und es gilt $K = Im(e)$. Nach Voraussetzung können wir jedes $x \in M$ eindeutig schreiben als $x = x_K + x_{K'}$ mit $x_K \in K$ und $x_{K'} \in K'$. Damit ist $(1-e)(x) = x_K + x_{K'} - e(x_K + x_{K'}) = x_{K'}$. Also ist $K' = Im(1-e)$.
'$\Leftarrow$': Es sei $e \in End_R(M)$ ein idempotenter Endomorphismus. Dann gilt $\forall x \in M : x = e(x) + 1(x) - e(x) = e(x) + (1-e)(x)$. Also ist zumindest $M = Im(e) + Im(1-e)$. Gilt nun für $x, y \in M$ die Relation $e(x) = (1-e)(y)$, so folgt: $e(x) = e(e(x)) = e((1-e)(y)) = e(y - e(y)) = e(y) - e(e(y)) = 0$. Also ist $Im(e) \cap Im(1-e) = \{0\}$. Setzen wir $K := Im(e)$ und $K' := Im(1-e)$ gilt folglich $M = K \oplus K'$. □

Bemerkung:
Es gibt immer die idempotenten Elemente $0, 1 \in End_R(M)$ und jedes Modul M lässt sich stets trivial in $M = M \oplus \{0\}$ zerlegen.

Satz 3.5 (Zusammenhang Idempotenz / Unzerlegbarkeit eines Moduls) Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) M ist unzerlegbar.

(ii) 1 und 0 sind die einzigen idempotenten Elemente in $End_R(M)$.

(iii) 1 ist primitives idempotentes Element in $End_R(M)$.

Beweis:
(i)$\Leftrightarrow$(ii): Dies folgt unmittelbar aus der der Definition der Unzerlegbarkeit (3.1,(ii)) und dem soeben bewiesenen Satz 3.4.
(ii)$\Rightarrow$(iii): Wenn es außer 1 und 0 keine anderen idempotenten Elemente gibt, dann gibt es natürlich auch keine andere Zerlegung der 1 in idempotente Elemente als $1 = 1 + 0 = 0 + 1$ und damit ist 1 primitiv idempotent.
(iii)$\Rightarrow$(ii): Es sei $e \in End_R(M)$ idempotent. Dann gilt $1 = e + (1-e)$. Da nach Voraussetzung 1 jedoch primitiv idempotent ist, folgt: $e = 0$ oder $1 - e = 0 \Leftrightarrow e = 1$. □

Satz 3.6 (Unzerlegbarkeit) Es gilt:

(i) Ist X ein A-Linksmodul, dann ist $Hom_A(Ae_i, X) \cong e_iX$.

(ii) Jedes Ae_i ist ein unzerlegbares Modul.

(iii) Die e_i sind nicht äquivalent, d.h. für $i \neq j$ ist $Ae_i \ncong Ae_j$ (als A-Moduln).

Beweis:

(i) Es sei $f \in Hom_A(Ae_i, X)$. Dann ist wegen der Linearität $f(ae_i) = af(e_i)$. Das bedeutet, dass f durch die Angabe des Bildes $x \in X$ von e_i bereits eindeutig bestimmt ist. Daher können wir jedes f durch $f(e_i) := x$ charakterisieren und notieren dieses f dann als f_x. Wir definieren nun eine Abbildung $\Phi : Hom_A(Ae_i, X) \leftrightarrow e_iX$ durch $f_x \mapsto e_ix$. Dann ist $\Phi(f_x + \lambda g_y) = e_i(x + \lambda y) = e_ix + \lambda e_iy = \Phi(f) + \lambda\Phi(g)$, also ist Φ k-linear. Da andererseits jedes Element in e_iX von der Form e_ix ist, können wir Φ^{-1} definieren durch $e_i x \mapsto f_x$, also ist $\Phi^{-1}(\Phi(f_x)) = f_x$. Somit ist Φ bijektiv und ein Isomorphismus von k-Vektorräumen.

(ii) Wir beweisen die Aussage, indem wir nach Satz 3.5 zeigen, dass $1 \in End_A(Ae_i)$ ein primitives idempotentes Element ist. Anwendung von (i) liefert die Isomorphie $End_A(Ae_i) \cong e_iAe_i$. Es ist dann $e_iAe_i \ni 1 = e_i$. Angenommen e_i wäre kein primitives idempotentes Element in e_iAe_i und wir könnten es als Summe zweier anderer orthogonaler idempotenter Elemente schreiben. Dies würde voraussetzen, dass es überhaupt ein weiteres von 1 und 0 verschiedenes idempotentes Element $f \in e_iAe_i$ gibt. Für dieses würde jedoch gelten $f = f^2 = fe_i \Rightarrow f^2 - fe_i = 0 \Rightarrow f(f - e_i) = 0$. Das ist ein Widerspruch. Denn f und $(f - e_i)$ starten und enden bei i und folglich kann das Produkt nicht 0 sein (siehe Satz 3.1,(vi)).

(iii) Angenommen es ist $Ae_i \cong Ae_j$ mit $i \neq j$. Dann liefert uns zunächst der inverse Isomorphismus aus (i) Elemente $f \in e_iAe_j \subseteq Ae_j$ und $g \in e_jAe_i \subseteq Ae_i$, für die gilt: $\Phi^{-1}(f) = f_x \in Hom_A(Ae_i, Ae_j)$ und $\Phi^{-1}(g) = g_y \in Hom_A(Ae_j, Ae_i)$. Da wir annehmen, dass $Ae_i \cong Ae_j$, gibt es solche Elemente, für die gilt: $g_y \circ f_x = id_{A_{e_i}}$ und $f_x \circ g_y = id_{A_{e_j}}$.
Die Abbildung Φ liefert einen Isomorphismus von Vektorräumen. Diese Vektorräume sind aber auch Algebren und wir wollen jetzt untersuchen, wie sich deren Multiplikation unter Φ verhält. Dazu wollen wir beweisen, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
Hom_A(Ae_i, Ae_j) \times Hom_A(Ae_j, Ae_i) & \xrightarrow{\circ} & Hom_A(Ae_i, Ae_i) \\
\Phi \big\downarrow & & \Phi \big\downarrow \\
e_iAe_j \times e_jAe_i & \xrightarrow{\cdot} & e_iAe_je_jAe_i \subseteq e_iAe_i
\end{array}$$

Es gilt einerseits:

$$(f_x, g_y) \overset{\Phi}{\longmapsto} (\Phi(f_x), \Phi(g_y)) = (e_ix, e_jy) \overset{\cdot}{\longmapsto} e_ix \cdot e_jy$$

Andersherum erhalten wir:

$$(f_x, g_y) \overset{\circ}{\longmapsto} g_y \circ f_x \overset{\Phi}{\longmapsto} e_i(g_y \circ f_x)(e_i)$$

Jetzt können wir aber umformen

$$\begin{aligned}
& e_i(g_y \circ f_x)(e_i) \\
& = e_ig_y(f_x(e_i)) \\
& = e_ig_y(f_x(e_i) \cdot e_j) \text{ ,da } f_x(e_i) \in Ae_j \\
& = e_if_x(e_i) \cdot g_y(e_j) \text{ ,da } g_y \text{ } A\text{-linear} \\
& = e_if_x(e_i) \cdot e_jg_y(e_j) \text{ ,da } e_j^2 = e_j \\
& = e_ix \cdot e_jy
\end{aligned}$$

und erhalten damit den Multiplikationssatz:

$$\boxed{\Phi(g_y \circ f_x) = \Phi(f_x) \cdot \Phi(g_y)}$$

Daraus folgt nun:

$$\begin{aligned} e_i &= \Phi(id_{Ae_i}) = \Phi(g_y \circ f_x) = \Phi(f_x) \cdot \Phi(g_y) = f \cdot g \in e_iAe_je_jAe_i = e_iAe_jAe_i \subseteq Ae_jA \\ e_j &= \Phi(id_{Ae_j}) = \Phi(f_x \circ g_y) = \Phi(g_y) \cdot \Phi(f_x) = g \cdot f \in e_jAe_ie_iAe_j = e_jAe_iAe_j \subseteq Ae_iA \end{aligned}$$

Nach Satz 3.1,(v) gilt: $e_i \in Ae_jA \Rightarrow i = j$. Widerspruch!

□

Bemerkung:
Die Aussage (iii) mag vielleicht zunächst verwundern. Der Köcher 1 2, der also lediglich aus zwei unverbundenen Knoten besteht, scheint ein Gegenbeispiel zu liefern. Denn hier ist $A = Lin_k(e_1, e_2)$ und somit $Ae_1 = Lin_k(e_1)$ und $Ae_2 = Lin_k(e_2)$. Es gibt jetzt aber eine offentlichtliche Bijektion φ mit $e_1 \leftrightarrow e_2$. Diese liefert aber nur eine Isomorphie von k-Vektorräumen, jedoch keine Isomorphie von A-Moduln, denn φ ist zwar k-linear, aber nicht A-linear!

4 Zusammenhang zwischen Wegealgebra und Köcher

Satz 4.1 A ist endlich-dimensional $\Leftrightarrow$ Q ist zyklenfrei

Beweis:
'$\Rightarrow$': Ist A endlich-dimensional, so gibt es nach Konstruktion von A eine endliche Basis $W = (w_1, \ldots, w_n)$ aus Wegen in Q. Angenommen Q hätte einen Zyklus. Dann gäbe es einen Weg x und einen Knoten i mit $i = t(x) = s(x)$. Damit wäre $\forall r \in \mathbb{N} : 0 \neq x^r \in W$ und somit wäre A unendlich-dimensional. Widerspruch!
'$\Leftarrow$': Nach Definition hat ein Köcher nur endlich viele Knoten (also nur endlich viele triviale Wege) und nur endlich viele Pfeile. Die einzige Möglichkeit, daraus unendlich viele verschiedene Wege zu konstruieren, ist, dass sich gewisse Folgen von Pfeilen wiederholen. Besitzt Q keinen orientierten Zyklus, ist genau das jedoch nicht der Fall. Also gibt es auch nur endlich viele nicht-triviale Wege und somit ist A endlich-dimensional. □

Definition 4.1 (Prim) Ein Ring R heißt *prim*, falls für beliebige zweiseitige Ideale I und J von R stets gilt: $I \neq 0 \wedge J \neq 0 \Rightarrow IJ \neq 0$.

Satz 4.2 A ist prim $\Leftrightarrow$ Zwischen beliebigen Knoten i,j gibt es stets einen Weg von j nach i

Beweis:
'$\Rightarrow$': Es sei also A prim und es seien i,j zwei beliebige Knoten. Wähle $I := Ae_iA$ und $J := Ae_jA$. Dann bestehen I und J aus allen Linearkombinationen von Wegen, die den Knoten i bzw. den Knoten j durchqueren.
Nach Konstruktion sind I und J zweiseitige Ideale.
Nach Voraussetzung gilt $IJ \neq 0$. Folglich gibt es ein $y \in J$, also einen Weg, der j durchquert und ein $x \in I$, also einen Weg, der i durchquert, und es gilt $xy \neq 0$. Folglich gibt es einen Weg, der j und i durchquert, und somit auch einen Weg, der von j nach i führt.
'$\Leftarrow$': Es gebe zwischen zwei beliebigen Knoten j und i stets einen Weg von j nach i. Seien I und J zwei beliebige von Null verschiedene zweiseitige Ideale. Dann gibt es einen Weg $0 \neq x \in I$ und einen Weg $0 \neq y \in J$. Es sei nun $j = t(y)$ und $i = s(x)$. Nach Voraussetzung

gibt es dann einen Weg w von j nach i, also ist $wy \neq 0$. Weil J insbesondere ein Linksideal ist, ist auch $wy \in J$ und damit $0 \neq xwy \in IJ$. Folglich ist $IJ \neq 0$. Grafisch dargestellt:

$$\xleftarrow{x} i \xleftarrow{w} j \xleftarrow{y}$$

□

Definition 4.2 (noethersch) Ein Ring R heißt *linksnoethersch* (*rechtsnoethersch*), wenn jede aufsteigende Kette von Linksidealen (Rechtsidealen) abbricht.
Wenn wir also eine Kette von Idealen der Form

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \cdots$$

vorliegen haben, dann gibt es einen Index n, sodass zum einen $I_s \neq I_t$ (für $s \neq t$), falls $1 \leq s, t \leq n$, und zum anderen $I_s = I_t$ für $n \leq s, t$ (*Ascending Chain Condition*). Jede Kette von obiger Form sieht also eigentlich so aus:

$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n = I_{n+1} = \cdots$$

Satz 4.3 A ist linksnoethersch (rechtsnoethersch) $\Leftrightarrow$ existiert ein orientierter Zyklus durch i, dann startet (endet) nur ein Pfeil bei i

Beweis:
'$\Rightarrow$': Sei A linksnoethersch und es sei $x = \rho_m \cdots \rho_1$ ein orientierter Zylkus mit $s(x) = t(x) = i$. Angenommen, es gäbe nun noch einen weiteren Pfeil $\varphi \neq \rho_1$ mit $s(\varphi) = i$. Dann können wir die folgende Kette von Linksidealen konstruieren:

$$(\varphi x) \subset (\varphi x, \varphi x^2) \subset (\varphi x, \varphi x^2, \varphi x^3) \subset \ldots$$

Diese Kette ist echt aufsteigend und bricht niemals ab. Widerspruch!
Ist A rechtsnoethersch so führt auf genau dieselbe Weise die Kette:

$$(x\varphi) \subset (x\varphi, x^2\varphi) \subset (x\varphi, x^2\varphi, x^3\varphi) \subset \ldots$$

zum gewünschten Widerspruch.
'$\Leftarrow$': Die soeben konstruierte Kette ist aber auch die einzige Möglichkeit, eine echt auf steigende Kette von Idealen zu konstruieren, die nicht abbricht. Startet (endet) in einem orientierten Zyklus durch i nun aber stets nur ein Pfeil bei i, so haben wir diese Situation nicht vorliegen und A ist linknoethersch (rechtsnoethersch). □

Definition 4.3 (Maximalität eines Untermoduls) Sei R ein Ring, M ein R-Modul und $S \subseteq M$ ein Untermodul. Dann heißt S *maximal*, falls für jedes weitere Untermodul T von M mit $S \subseteq T$ gilt: $T = S$ oder $T = M$.

Definition 4.4 (Kleines Untermodul) Ein Untermodul S eines R-Moduls M heißt *klein* in M, falls für jedes weitere Untermodul $T \subseteq M$ folgt: $S + T = M \Rightarrow T = M$

Definition 4.5 (Jacobson-Radikal) Es sei M ein R-Modul, dann heißt die Menge
$rad(M) := \bigcap\{K|$ K ist maximales Untermodul von $M\} = \sum\{S|$ S ist kleines Untermodul in $M\}$
Jacobson-Radikal von M.

Satz 4.4 Die Mege M :={Wege von i nach j | es gibt keinen Weg von j nach i} ist eine Basis des Jacobson-Radikals von A.

Beweis:
Nach Satz 3.6,(ii) wissen wir, dass die Ae_i immerhin schon unzerlegbare Untermoduln sind. Wir suchen darin nun die kleinen Untermoduln.

Definieren wir $I_R :=$ {Wege $x \in Ae_i \mid$ zu x existiert ein Rückweg von $t(x)$ nach i} und $I_N :=$ {Wege $x \in Ae_i \mid$ zu x existiert kein Rückweg von $t(x)$ nach i}, so ist $Ae_i = I_R + I_N$. Allerdings ist I_R kein A-Linksmodul. Denn es kann sein, dass es einen Weg $a \xrightarrow{x} b$ gibt, der einen Rückweg $a \xleftarrow{\overline{x}} b$ besitzt und einen Weg $a \xrightarrow{y} c$, der keinen Rückweg besitzt. Dann ist zwar $x \in I_R$, aber $y\overline{x}x \notin I_R$.
Andererseits ist I_N ein Untermodul von Ae_i. Hier kann es nach Konstruktion nicht vorkommen, dass wir zu einem Weg in Ae_i einen Rückweg in A finden.
Es bestehe nun eine Relation der Gestalt $Ae_i = I_N + X$, wobei X ein Untermodul sei. Da $I_N \cap I_R = \{0\}$, gilt: $I_R \subseteq Ae_i \Rightarrow I_R \subseteq X$. Jetzt kann aber X nur dann ein Untermodul sein, wenn es unter skalarer Linksmultiplikation über A abgeschlossen ist. Wir haben gesehen, dass I_R alleine diese Bedingung nicht erfüllt. Abgeschlossenheit liegt also nur dann vor, wenn wir auch die Wege, die keinen Rückweg besitzen, zu X mit hinzunehmen. Daraus folgt aber, dass bereits $X = Ae_i$.
Damit ist also für jedes Ae_i das dazugehörige I_N klein in Ae_i und folglich bildet die Summe dieser I_N eine Basis des Jacobson-Radikals von M. □

Definition 4.6 (Unterköcher, Zusammenhang, Zusammenhangskomponente) Es sei $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ ein Köcher.

(i) Das Tupel $C = (C_0, C_1, s, t)$ heißt *Unterköcher* von Q, falls gilt

  a) $C_0 \neq \emptyset$

  b) $C_0 \subseteq Q_0$

  c) $\forall \rho \in C_1 : s(\rho) \in C_0 \wedge t(\rho) \in C_0$.

(ii) Ein Unterköcher C heißt *(pfeil-)zusammenhängend*, falls gilt: $\forall i \in C_0 : \exists \rho \in C_1 : s(\rho) = i \vee t(\rho) = i$.

(iii) Ein Unterköcher C heißt *maximal zusammenhängend*, falls gilt: $\forall \rho \in Q_1 \setminus C_1 : s(\rho) \notin C_0 \wedge t(\rho) \notin C_0$.

(iv) Ein maximal zusammenhängender Unterköcher heißt *Zusammenhangskomponente.*

Satz 4.5 Es sei Q ein Köcher, es seien $C_1, \ldots, C_l$ Zusammenhangskomponenten von Q, die nur aus einem orientierten Zyklus bestehen, es seien $C_{l+1}, \ldots, C_n$ die übrigen Zusammenhangskomponenten von Q, bei denen das nicht der Fall ist, und es sei $Z(A)$ das Zentrum von A. Dann gilt: $Z(A) \cong k[X]^l \times k^{n-l}$

Beweis:
Es sei C_i $(1 \leq i \leq l)$ eine Zusammenhangskomponente, von der wir annehmen wollen, dass sie nur aus einem orientierten Zyklus durch die Knoten $1, \ldots, m$ besteht. Es sei nun z_j $(1 \leq j \leq m)$ ein Weg mit $s(z_j) = t(z_j) = j$, der genau einmal durch den ganzen Zyklus C_i läuft. Wir definieren jetzt $X := \sum_{j=1}^m z_j$. Da C_i eine Zusammenhangskomponente ist, gilt $\forall y \in A$: $yX = Xy = 0$, falls es sich bei y um einen Weg in einer anderen Zusammenhangskomponente handelt. Dies ist also kommutativ. Nehmen wir nun an, dass y ein Weg innerhalb von C_i ist, mit $s(y) =: a$ und $t(y) =: b$. Dann ist $yX = y\sum_{j=1}^m z_j = \sum_{j=1}^m yz_j = yz_a$ und $Xy = \sum_{j=1}^m z_jy = z_by$. Betrachten wir diese Situation auf Pfeilebene, erkennen wir, dass tatsächlich $yz_a = z_by$ gilt und wir hier also ebenfalls Kommutativität vorliegen haben:

$$yz_a : \underbrace{a \xrightarrow{\rho_a} a+1 \xrightarrow{\rho_{a+1}} \cdots \xrightarrow{\rho_{b-1}} b \xrightarrow{\rho_b} b+1 \xrightarrow{\rho_{b+1}} \cdots \xrightarrow{\rho_{a-1}} a}_{z_a} \underbrace{\xrightarrow{\rho_a} a+1 \xrightarrow{\rho_{a+1}} \cdots \xrightarrow{\rho_{b-1}} b}_{y}$$

$$z_b y : \underbrace{a \xrightarrow{\rho_a} a+1 \xrightarrow{\rho_{a+1}} \cdots \xrightarrow{\rho_{b-1}} b}_{y} \underbrace{\xrightarrow{\rho_b} b+1 \xrightarrow{\rho_{b+1}} \cdots \xrightarrow{\rho_{a-1}} a \xrightarrow{\rho_a} a+1 \xrightarrow{\rho_{a+1}} \cdots \xrightarrow{\rho_{b-1}} b}_{z_b}$$

Es gilt jetzt ferner $\forall s \in \mathbb{N} : X^s = \sum_{j=1}^m z_j^s$, weil die z_j untereinander nur mit sich selbst komponierbar sind. Verstehen wir außerdem unter $X^0 := \sum_{j=1}^m e_j$, dann ist $\forall \lambda \in k \forall s \in \mathbb{N}_0 : \lambda X^s \in Z(A)$. Also ist $Z(A) \cong k[X]$ und da es l solcher Komponenten gibt und keine anderen Elemente existieren, die mit allen anderen kommutieren, ist der Anteil dieser Komponenten am Zentrum also $k[X]^l$.
Es sei ab jetzt C_i $(l+1 \leq i \leq n)$ eine der anderen Zusammenhangskomponenten von Q mit den Knoten $1, \ldots, m$. Dann ist nur das Einselement von C_i, $1_{C_i} = \sum_{j=1}^m e_j$, und $k1_{C_i} \cong k$ im Zentrum von A. Da wir $n-l$ solcher Komponenten vorliegen haben ist deren Anteil am Zentrum von A also k^{n-l}. □

Literatur

[1] Crawley-Boevey: ”Lectures on Quivers” (www.maths.leeds.ac.uk/~pmtwc/quivlecs.pdf)

[2] Anderson, Fuller: ”Rings and Categories of Modules”