# Funktionen, Mächtigkeit, Unendlichkeit

Nikolai Nowaczyk <mail@nikno.de> http://math.nikno.de,
Lars Wallenborn <lars@wallenborn.net> http://www.wallenborn.net/

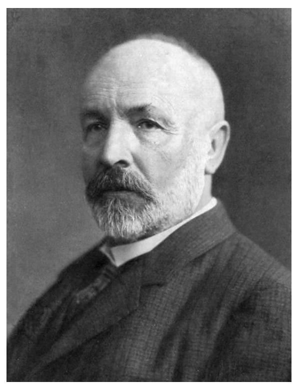
Frühjahrsakademie 12.04. - 14.04.2013

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Motivation

*"I think you find most people require some period of adjustment after being confronted with the dark forces that surround us."*
WESLEY, ROGUE DAEMON HUNTER, 1999

## 1.1 Georg Cantor



Georg Cantor - Gehasst, verdammt, vergöttert

**Fakten über Cantor**[1]

- Mitbegründer der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.
- Begründer der modernen Mengenlehre. (It has been suggested that Cantor believed his theory [...] had been communicated to him by God.)
- Für seine Mengenlehre wurde er von fast allen anderen Mathematikern gehasst.
- In Folge dessen wurde er depressiv, mehrfach eingewiesen und ist schließlich in einem Sanatorium gestorben.
- Cantors Theorien sind inzwischen als absolut korrekt anerkannt.

[1] Wikipedia

**Aussagen über Cantor**[2]

- Für einige christliche Theologen wurde durch Cantors Werk die Eindeutigkeit der absoluten Unendlichkeit in der Natur Gottes in Frage gestellt an.
- Poincaré: "eine schwere Krankheit, die die Disziplin der Mathematik infiziert"
- Kronecker: "wissenschaftlicher Scharlatan", "Abtrünniger", "Verderber der Jugend".
- Wittgenstein: "durch und durch verdorben durch seine bösartigen Axiome der Mengentheorie", die alle samt "absoluter Blödsinn", "lächerlich" und "falsch" sind.

"Niemand soll uns aus dem Paradies vertreiben, dass Cantor erschaffen hat." - David Hilbert

# 2 Relationen

[2]Wikipedia

*"The enemy of my enemy is still my enemy."*
DRAGO MUSEVENI, PROGENITOR OF THE NIETZSCHEAN RACE,
C.Y. 8427

## 2.1 Cartesisches Produkt

**2.1.1 Definition.** Seien $X$ und $Y$ Mengen. Dann heißt

$$X \times Y := \{ (x, y) \mid x \in X, y \in Y \}$$

*Cartesisches Produkt von $X$ und $Y$*. Es besteht also aus der Menge aller zwei-Tupel $(x, y)$.

## 2.2 Allgemeine Relationen

**2.2.1 Definition** (Relation)**.** Seien $X$ und $Y$ Mengen. Eine *Relation zwischen $X$ und $Y$* ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times Y$ des Cartesischen Produkts. Für $x \in X$ und $y \in Y$ sagen wir, dass $x$ in $R$-Relation zu $y$ steht, falls $(x, y) \in R$. Formal

$$\forall (x, y) \in X \times Y : x \sim_R y :\Longleftrightarrow (x, y) \in R.$$

## 2.3 Äquivalenzrelationen

**2.3.1 Definition.** Eine Relation $\sim \subset X \times X$ heißt *Äquivalenzrelation*, falls gilt:

1. Reflexivität: $\forall x \in X : x \sim x$.
2. Symmetrie: $\forall x, y \in X : x \sim y \Longrightarrow y \sim x$.
3. Transitivität: $\forall x, y, z \in X : x \sim y$ und $y \sim z \Longrightarrow x \sim z$.

**2.3.2 Definition.**

- Für ein $x \in X$ heißt

$$[x] := [x]_\sim := \{ y \in X \mid x \sim y \} \subset X$$

*Äquivalenzklasse von $x$*.

- Die Menge aller Äquivalenzklassen wird *Quotient* oder *Faktor* genannt und so notiert:

$$X/\sim \;:= \{\, [x] \mid x \in X \,\}\,.$$

- Für $x \in X$ heißt jedes $y \in [x]$ *Repräsentant* der Äquivalenzklasse $[x]$ und eine Menge $Z \subseteq X$ heißt *vollständiges Repräsentantensystem von* $X$ (VRS), wenn es für jedes $x \in X$ genau ein $z \in Z$ gibt sodass $x \sim z$.

**Beispiele**

**2.3.1 Beispiel.**

1. "$=$" auf reellen Zahlen.

   **Klasse** Für $x \in \mathbb{R}$ ist $[x]_= = \{x\}$.

   **Quotient** $\mathbb{R}/= \;= \{\, \{x\} \mid x \in \mathbb{R} \,\}$.

   **VRS** $\mathbb{R}$

2. Gleichaltrigkeit $\sim$ auf der Menge $M$ aller Menschen.

   **Klasse** $[m]_\sim = \{\, m' \in M \mid m'$ ist genauso alt wie $m \,\}$.

   **Quotient** $M/\sim \;= \{\, 1, 2, 3, \ldots, 114, 115 \,\}$ wobei hier die 1 die Menge der einjährigen Menschen bezeichnet, 2 die Menge der zweijährigen Menschen usw.

   **VRS** Eine Menge von Menschen mit paarweise verschiedenen Altern sodass jedes Alter genau einmal vorkommt.

**2.3.2 Beispiel.** 1. Kongruenz modulo $n$ auf $\mathbb{Z}$.

   **Klasse** Für $k \in \mathbb{Z}$ ist

$$[k]_\equiv := \{\, m \in \mathbb{Z} \mid m \equiv k \pmod n \,\} = n\mathbb{Z} + k$$

   **Quotient** $\mathbb{Z}/\equiv \;:= \{\, [k]_\equiv \mid k \in \mathbb{Z}, 0 \le k \le n-1 \,\}$

   **VRS** $\{\, 0, \ldots, n-1 \,\}$

**2.3.1 Gegenbeispiel.** 1. "Abstand $< 1$ haben" auf $\mathbb{R}^2$.

2. $\le$ auf $\mathbb{R}$.
3. $>$ auf $\mathbb{R}$.
4. Die LIEBE!

**2.3.1 Lemma** (Partitionseigenschaft)**.** Sei $X$ eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation und $x, y \in X$. Dann gilt entweder

$$[x] = [y] \quad \text{oder} \quad [x] \cap [y] = \emptyset.$$

**Beweis.** Wir unterscheiden zwei Fälle:

$x \sim y$ Sei $z \in [x]$ dann gilt $z \sim x$. Wegen der Symmetrie auch $x \sim z$, also $z \sim x \sim y$ wegen der Transitivität, also $z \in [y]$ und damit $[x] \subseteq [y]$. Da dieses Argument völlig symmetrisch in $x$ und $y$ ist, gilt auch $[y] \subseteq [x]$ und insgesamt $[x] = [y]$.

$x \not\sim y$ Angenommen es gäbe ein $z \in [x] \cap [y]$, dann wäre $x \sim z \sim y$ im Widerspruch zur Annahme.

□

**2.3.1 Theorem.** Die Äquivalenzklassen bilden eine Partition.

Partitionierung einer Menge.

**2.3.1 Bemerkung.** Sei $X$ eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$. Obige Aussage heißt dann:

1. $X = \bigcup_{x \in X} [x]$.
2. $\forall x, y \in X \colon x \not\sim y \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$.

**Beweis.**

1. Für jedes $x \in X$ gilt wegen der Reflexivität $x \in [x]$.

2. Es genügt nun zu zeigen, dass aus $x \not\sim y$ folgt, dass $[x] \neq [y]$ — wegen Lemma 2.3.1 folgt dann nämlich $[x] \cap [y] = \emptyset$.

$\square$

# 3 Funktionen

*"Don't worry, be happy."*
ROKHAN, SHADOW HUNTER LEGEND, 25

## 3.1 Totalität und Eindeutigkeit

**3.1.1 Definition** (linkstotal)**.** Sei $R$ eine Relation zwischen $X$ und $Y$. Dann heißt $R$ *linkstotal*, falls es für jedes $x \in X$ ein $y \in Y$ gibt, sodass $x \sim_R y$. Formal

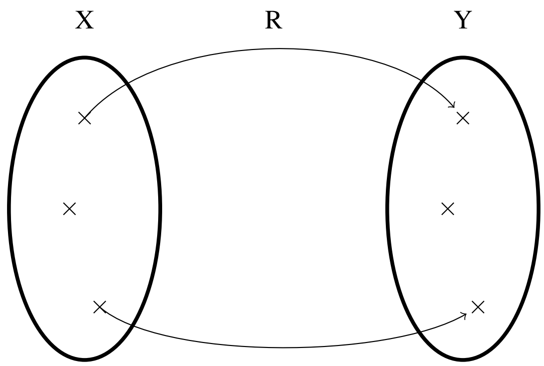
$$\forall x \in X : \exists y \in Y : x \sim_R y.$$

**3.1.2 Definition** (rechtseindeutig)**.** Sei $R$ eine Relation zwischen $X$ und $Y$. Dann heißt $R$ *rechtseindeutig*, falls für alle $x \in X$ und $y_1, y_2 \in Y$ gilt: Ist $x \sim_R y_1$ und $x \sim_R y_2$, dann ist $y_1 = y_2$. Formal:

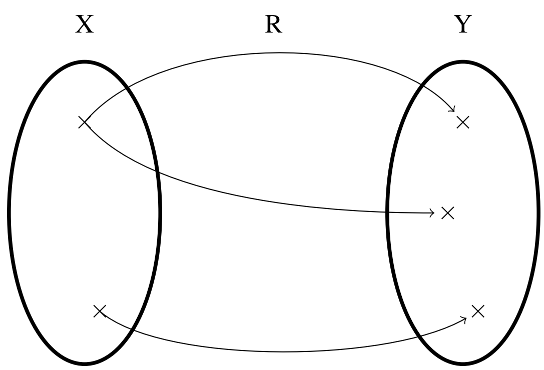
$$\forall x \in X : \forall y_1, y_2 \in Y : (x \sim_R y_1 \text{ und } x \sim_R y_2) \Longrightarrow y_1 = y_2.$$

**3.1.1 Bemerkung.**

- Linkstotal heißt, dass jedes $x \in X$ auf mindestens ein $y \in Y$ geschickt wird.
- Rechtseindeutig heißt, dass jedes $x \in X$ auf höchtens ein $y \in Y$ geschickt wird.




Diese Relation ist nicht linkstotal (aber rechtseindeutig).




Diese Relation ist nicht rechtseindeutig (aber linkstotal).

**3.1.3 Definition** (Funktion)**.** Eine Relation $f$ zwischen $X$ und $Y$ heißt *Funktion* oder *Abbildung*, falls sie linkstotal und rechtseindeutig ist. Man kann beide Eigenschaften zusammenfassen zu:

$$\forall x \in X : \exists! y \in Y : x \sim_f y.$$

**3.1.4 Definition.**

- Ist eine Relation $f \subset X \times Y$ eine Funktion, so notieren wir diese mit $f : X \to Y$.

- Für jedes $x \in X$ schreiben wir das nach obiger Gleichung eindeutig bestimmte $y \in Y$, sodass $x \sim_f y$ gilt mit $f(x)$.
- Die Menge $X$ heißt dann *Definitionsbereich*, die Menge $Y$ heißt *Wertebereich*, $f$ heißt *Funktionsname* und die Zuordnung eines $x \in X$ zu einem $f(x) \in Y$ heißt *Abbildungsvorschrift*.

**3.1.1 Notation.** Um eine Funktion konkret hinzuschreiben muss man zwingend Definitionsberech, Wertebereich, Abbildungsvorschrift angeben (es empfielt sich sehr einen Namen zu wählen). Dies notiert man häufig kompakt so

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

**3.1.1 Beispiel.**

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tfrac{1}{x} \end{aligned}$$

**3.1.5 Definition** (Gleichheit von Funktionen)**.** Zwei Funktionen

$$\begin{aligned} f_1 : X_1 &\rightarrow Y_1 \\ x_1 &\mapsto f_1(x_1) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f_2 : X_2 &\rightarrow Y_2 \\ x_2 &\mapsto f_2(x_2) \end{aligned}$$

heißen *gleich*, falls $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$ und

$$\forall x \in X_1 : f_1(x) = f_2(x).$$

**3.1.2 Bemerkung.**

- Diese Art der Gleichheitsdefinition ist sehr pingelig. Die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

  wären demnach verschieden, weil ihre Wertebereiche nicht übereinstimmen.
- Die Aufgabe "Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion $f(x) = x^2$" ergibt überhaupt keinen Sinn.
- Man muss sich daher bei der Definition der Funktion "sinnvolle" Definitions- und Wertebereiche überlegen.

## 3.2 Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

**3.2.1 Definition.** Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt *injektiv*, falls gilt:

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Es heißt $f$ *surjektiv*, falls gilt

$$\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y.$$

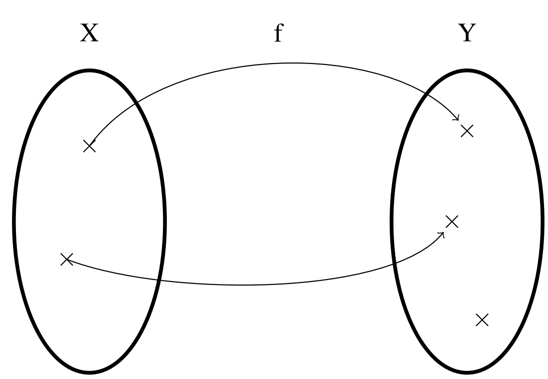
Schließlich heißt $f$ *bijektiv*, falls $f$ injektiv und surjektiv ist. Das kann man auch zu der Bedingung

$$\forall x \in X : \exists! y \in Y : f(x) = y$$

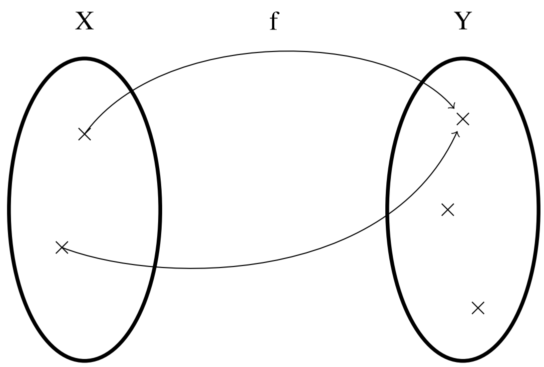
zusammenfassen.

**3.2.1 Bemerkung.**

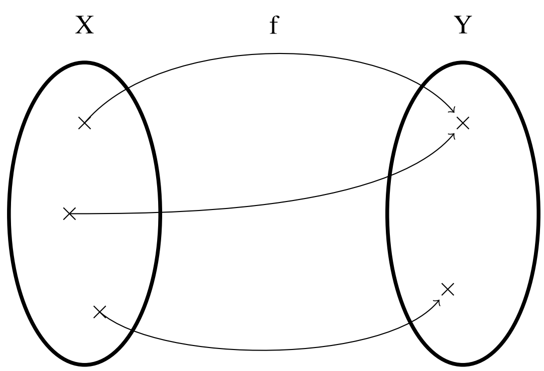
- Injektivität bedeutet, dass jedes Element $y \in Y$ höchstens einmal von einem Element $x \in X$ unter $f$ "getroffen" wird.
- Surjektivität bedeutet, dass jedes Element $y \in Y$ mindestens einmal von einem Element $x \in X$ unter $f$ "getroffen" wird.
- Bijektivität bedeutet, dass jedes Element $y \in Y$ genau einmal von einem Element $x \in X$ unter $f$ "getroffen" wird.



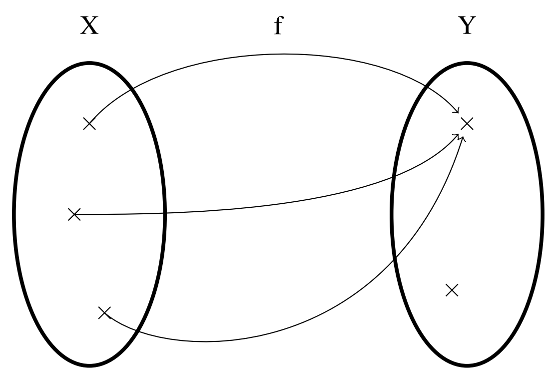

Diese Abbildung ist injektiv (aber nicht surjektiv).



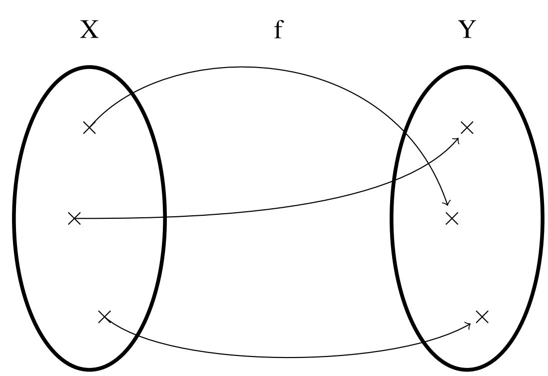

Diese Abbildung ist nicht injektiv (und nicht surjektiv).




Diese Abbildung ist surjektiv (aber nicht injektiv.)




Diese Abbildung ist nicht surjektiv (und nicht injektiv.)




Diese Abbildung ist bijektiv.

**3.2.2 Bemerkung.** In Analogie zur Definition von Funktion könnte man *injektiv* auch *linkseindeutig* und *surjektiv* auch *rechtstotal* nennen. Das macht aber kein Mensch. Man darf hier auf keinen Fall $X$ und $Y$ ("links" und "rechts" verwechseln). Hier nochmal im Vergleich:

$$\forall x \in X : \exists y \in Y : x \sim_f y, \qquad \text{(linkstotal)}$$
$$\forall y \in Y : \exists x \in X : x \sim_f y. \qquad \text{(surjektiv)}$$

**3.2.3 Bemerkung.** Rechtseindeutig:

$$\begin{aligned}\forall x_1, x_2 \in X : \forall y_1, y_2 \in Y :& \\ & x_1 = x_2 \text{ und } x_1 \sim_f y_1 \text{ und } x_1 \sim_f y_2 \\ & \Longrightarrow y_1 = y_2,\end{aligned}$$

Injektiv:

$$\begin{aligned}\forall x_1, x_2 \in X : \forall y_1, y_2 \in Y :& \\ & y_1 = y_2 \text{ und } x_1 \sim_f y_1 \text{ und } y_1 \sim_f y_2 \\ & \Longrightarrow x_1 = x_2.\end{aligned}$$

## 3.3 Bild und Urbild

**3.3.1 Definition** (Bild)**.** Sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann heißt für jede Teilmenge $A \subset X$ die Menge

$$f(A) := \{f(a) \mid a \in A\} \subset Y$$

das *Bild von $A$ unter $f$ in $Y$*. Insbesondere setzt man für $A = X$ auch

$$\mathrm{Bild}(f) := f(X).$$

**3.3.1 Lemma.** Eine Funktion $f : X \to Y$ ist surjektiv, genau dann wenn $\mathrm{Bild}(f) = Y$.

**3.3.2 Definition** (Urbild)**.** Sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann heißt für jede Teilmenge $B \subset Y$ die Menge

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subset X$$

das *Urbild von $B$ unter $f$ in $X$*.
**3.3.1 Bemerkung.** Es gilt immer $f^{-1}(Y) = X$.

## 3.4 Verkettung

**3.4.1 Definition** (Verkettung)**.** Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ beliebige Funktionen. Dann heißt die Funktion

$$\begin{aligned} g \circ f : X &\to Z \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

*Verkettung von $f$ und $g$.*

**3.4.1 Lemma.** Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ beliebige Funktionen.

- Sind $f$ und $g$ injektiv, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.
- Sind $f$ und $g$ surjektiv, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.
- Sind $f$ und $g$ bijektiv, dann ist auch $g \circ f$ bijektiv.

**Beweis.**

**Injektivität** Seien $x_1, x_2 \in X$ beliebig und es gelte

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Weil $g$ injektiv ist, folgt daraus

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Weil $f$ injektiv ist, folgt daraus

$$x_1 = x_2.$$

Also ist $g \circ f$ injektiv.

**Surjektivität** Sei $z \in Z$ beliebig. Weil $g$ surjektiv ist, existiert ein $y \in Y$, sodass $g(y) = z$. Weil $f$ surjektiv ist, existiert ein $x \in X$, sodass $f(x) = y$. Also insgesamt

$$g(f(x)) = g(y) = z.$$

Also ist $g \circ f$ surjektiv.

**Bijektivität** Per Definition sind $f$ und $g$ injektiv und surjektiv. Nach dem bisher Bewiesenen ist also $g \circ f$ injektiv und surjektiv. Also ist $g \circ f$ bijektiv.

$\square$

## 3.5 Umkehrfunktion

**3.5.1 Definition** (Identität)**.** Für jede Menge $X$ heißt die Funktion

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_X : X &\to X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

*Identität auf* $X$.

**3.5.1 Bemerkung.** Die Identität ist bijektiv und es gilt $\mathrm{id}_X^{-1} = \mathrm{id}_X$.

**3.5.1 Theorem.** Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann bijektiv, falls es eine Funktion $g : Y \to X$ gibt, sodass

$$g \circ f = \mathrm{id}_X, \qquad\qquad f \circ g = \mathrm{id}_Y .$$

Man schreibt in diesem Falle auch $f^{-1} := g$.

# 4 Gleichmächtigkeit

*"A suspicious mind is a healthy mind."*
IMPERIUM THOUGHT FOR THE DAY,
39.634

## 4.1 Endliche Mengen

**4.1.1 Definition** (Mächtigkeit)**.** Sei $X$ eine endliche Menge. Dann heißt die Anzahl der Elemente von $X$ die *Mächtigkeit von* $X$ und wird mit $|X|$ notiert. Wir sagen $X$ und $Y$ sind *gleichmächtig*, falls $|X| = |Y|$.
**4.1.1 Aufgabe.**

- Was ist die Mächtigkeit von $\{1, 2, 3\}$?
- Was ist die Mächtigkeit von $\{2, 3, 4\}$?
- Was ist die Mächtigkeit von $\{p \in \{1, 2, \dots, 10\} \mid p \text{ ist prim}\}$?

**4.1.1 Lemma.** Seien $X$ und $Y$ Mengen, wobei $X$ endlich sei. Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann injektiv, falls

$$|f(X)| = |X|.$$

**Beweis.** Es gilt immer $|f(X)| \leq |X|$, da $f$ rechtseindeutig ist. Es gilt $|X| \leq |f(X)|$, genau dann, wenn $f$ injektiv. $\square$

**4.1.1 Theorem.** Zwei endliche Mengen $X$ und $Y$ sind genau dann gleichmächtig, wenn es eine bijektive Funktion $f : X \to Y$ gibt.

**Beweis.** Nach Voraussetzung sind beide Mengen endlich. Daher können sie in der Form

$$\begin{aligned} X &= \{x_1, \ldots, x_n\} \\ Y &= \{y_1, \ldots, y_m\} \end{aligned}$$

geschrieben werden. Es sei o.E. $n \leq m$. Definiere

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x_i &\mapsto y_i \end{aligned}$$

für $i = 1, \ldots, n$. □

**Beweis.**

**"$\Longrightarrow$":** Falls $X$ und $Y$ gleichmächtig sind, so gilt $m = n$ und offenbar ist

$$\begin{aligned} g : Y &\to X \\ y_i &\mapsto x_i \end{aligned}$$

die Umkehrfunktion von $f$. Also ist $f$ bijektiv.

**"$\Longleftarrow$":** Falls es eine Bijektion $f : X \to Y$ gibt, dann gilt wegen der Injektivität von $f$, dass $|f(X)| = |X|$ und wegen der Surjektivität von $f$, dass $f(X) = Y$. Insgesamt also

$$m = |Y| = |f(X)| = |X| = n.$$

□

**4.1.2 Theorem.** Seien $X$ und $Y$ gleichmächtige endliche Mengen und $f : X \to Y$ eine beliebige Funktion. Dann sind äquivalent:

1. $f$ ist injektiv.
2. $f$ ist surjektiv.
3. $f$ ist bijektiv.

**Beweis.**

**'(1)'$\Longrightarrow$'(2)'** Da $f$ injektiv ist, gilt nach Lemma 4.1.1

$$|f(X)| = |X| = |Y|,$$

also $f(X) = Y$. Damit ist $f$ surjektiv.

**'(2)'$\Longrightarrow$'(3)'** Es gilt also $f(X) = Y$, folglich $|f(X)| = |Y|$ und somit ist $f$ auch injektiv und damit bijektiv.

**'(3)'$\Longrightarrow$'(1)'** per Definition.

□

## 4.2 Beliebige Mengen

**4.2.1 Definition** (Gleichmächtigkeit)**.** Zwei Mengen $X$ und $Y$ heißen *gleichmächtig*, falls es eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ gibt.
**4.2.1 Bemerkung.** Gleichmächtigkeit erfüllt

**Reflexivität** Für jede Menge $X$ ist $\mathrm{id}_X : X \to X$ eine Bijektion.

**Symmetrie** Ist $f : X \to Y$ eine Bijektion, so ist $f^{-1} : Y \to X$ auch eine Bijektion.

**Transitivität** Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ bijektiv, dann ist $g \circ f : X \to Z$ bijektiv.

Hier hätten wir gerne gesagt "Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Mengen". Sagen wir aber nicht.

## 4.3 Abzählbarkeit

**4.3.1 Definition** (abzählbar)**.** Eine Menge $X$ heißt *abzählbar unendlich*, falls $X$ gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist. $X$ heißt *abzählbar* (manchmal auch *höchstens abzählbar*), falls $X$ endlich oder abzählbar unendlich ist.
**4.3.2 Definition** (überabzählbar)**.** Eine Menge $X$ heißt *überabzählbar*, falls $X$ nicht abzählbar ist.

**4.3.1 Beispiel.**

- Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & 2\mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}$$

  ist eine Bijektion.

- Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ gerade}, \\ -\frac{n+1}{2}, & n \text{ ungerade}. \end{cases} \end{array}$$

  ist eine Bijektion.

## 4.4 Abzählbarkeit

**4.4.1 Theorem** (Abzählbarkeit von Teilmengen)**.** Jede unendliche Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ ist abzählbar.

**Beweis.** Weil $\mathbb{N}$ angeordnet ist, ist $A$ von der Form

$$A = \{a_0 < a_1 < a_2 < \ldots\}$$

und damit liefert die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{N} \\ a_i & \mapsto & i \end{array}$$

eine Bijektion. □

**4.4.1 Korollar.** Die folgenden Mengen sind abzählbar.

1. Die geraden Zahlen.
2. Die ungeraden Zahlen.
3. Die Primzahlen.
4. Die Menge $\left\{ 10^k \mid k \in \mathbb{N} \right\}$.

**4.4.2 Theorem** (Abzählbarkeit rationaler Zahlen)**.** $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

**Beweis.**

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{1}{1}\ (1) & \rightarrow & \frac{1}{2}\ (2) & & \frac{1}{3}\ (5) & \rightarrow & \frac{1}{4}\ (6) & & \frac{1}{5}\ (11) & \rightarrow \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
\frac{2}{1}\ (3) & & \frac{2}{2}\ (\cdot) & & \frac{2}{3}\ (7) & & \frac{2}{4}\ (\cdot) & & \frac{2}{5} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & \\
\frac{3}{1}\ (4) & & \frac{3}{2}\ (8) & & \frac{3}{3}\ (\cdot) & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & & & & & \\
\frac{4}{1}\ (9) & & \frac{4}{2}\ (\cdot) & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \frac{4}{5} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & & & & & & & \\
\frac{5}{1}\ (10) & & \frac{5}{2} & & \frac{5}{3} & & \frac{5}{4} & & \frac{5}{5} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & 
\end{array}
$$

$\square$

**4.4.3 Theorem.** Die reellen Zahlen sind überabzählbar.

**Beweis.** Dies beweisen wir durch Widerspruch. Angenommen $\mathbb{R}$ sei abzählbar, dann lassen sich die reellen Zahlen als Liste schreiben:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 0, \underline{a_{11}}\ a_{12}\ a_{13} \dots \\
z_2 &= 0, a_{11}\ \underline{a_{12}}\ a_{13} \dots \\
z_3 &= 0, a_{11}\ a_{12}\ \underline{a_{13}} \dots \\
z_4 &= \dots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Nun definieren wir eine reelle Zahl

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$$

indem wir die $i$-te Dezimalstelle explizit angeben:

$$x_i = \begin{cases} 4 \text{ falls } a_{ii} = 5 \\ 5 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Nun sehen wir aber, dass es kein $i$ gibt sodass $x = z_i$, denn $x$ ist an der $i$-ten Stelle von $z_i$ verschieden. Also war die obige Liste nicht vollständig im Widerspruch zur Annahme. $\square$

# Index