Das Jacobische Umkehrproblem

Nikolai Nowaczyk

März 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlegende Definitionen zu Riemannschen Flächen

Definition 1.1 (Riemannsche Fläche)**.**

(i) Ein topologischer Hausdorff-Raum M heißt *n-dimensionale Mannigfaltigkeit*, falls jeder Punkt $a \in M$ eine Umgebung besitzt, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist.

(ii) Sei X eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Ein Tupel $(U, \phi$ bestehend aus einer offenen Menge $U \subset X$ und einem Homöomorphismus $\phi : U \to V$ in eine offene Menge $V \subset \mathbb{C}$ heißt *komplexe Karte von X.*

(iii) Zwei solcher Karten (U_1, ϕ_1),(U_2, ϕ_2) heißen *holomorph verträglich*, falls die Abbildung $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2)$ holomorph im gewöhnlichen Sinne ist.

(iv) Ein System $A = \{\phi_i : U_i \to V_i, i \in I\}$ heißt *komplexer Atlas für X*, falls alle darin enthaltenen Karten holomorph verträglich sind und die Definitionsbereiche die Mannigfaltigkeit überdecken, d.h. falls gilt $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.

(v) Zwei Atlanten A_1,A_2 heißen *analytisch äquivalent*, falls jede Karte aus A_1 mit jeder Karte aus A_2 holomorph verträglich ist und umgekehrt.

(vi) Eine Äquivalenzklasse Σ eines Atlanten heißt *komplexe Struktur auf X*.

(vii) Ein Tupel (X, Σ) bestehend aus einer zusammenhängenden zweidimensionalen Mannigfaltigkeit X und einer komplexen Struktur Σ heißt *Riemannsche Fläche.* Wir notieren oft X anstelle von (X, Σ).

Definition 1.2 (Holomorphe Funktionen und Abbildungen)**.** Sei X eine Riemannsche Fläche.

(i) Sei $X' \subset X$ und $f : X' \to \mathbb{C}$. Dann heißt f *holomorphe Funktion auf X'*, falls gilt: Für jede Karte $\phi : U \to V$ von X ist die Abbildung $f \circ \phi^{-1} : X' \cup U \to \mathbb{C}$ holomorph im gewöhnlichen Sinn. Die Menge aller holomorphen Funktionen auf X' bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(X')$.

(ii) Es sei Y eine weiter Riemannsche Fläche und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann heißt f *holomorph*, falls für je zwei Karten $\phi : U_1 \to V_1$ von X und $\psi : U_2 \to V_2$ die Abbildung $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : V_1 \to V_2$ holomorph im gewöhnlichen Sinne ist.

(iii) Eine solche Abbildung $f : X \to Y$ heißt *biholomorph*, falls sie bijektiv und holomorph ist, sowie eine holomorphe Umkehrfunktion besitzt.

(iv) Zwei Riemannsche Flächen heißen *isomorph* falls es eie biholomorphe Abbildung zwischen ihnen gibt.

Definition 1.3 (Taylor-Reihe)**.** Sei X eine Riemannsche Fläche und $f :\to \mathbb{C}$ eine bei $a \in X$ holomorphe Funktion. Für eine beliebige um a zentrierte Karte (U, φ) lässt sich die Funktion $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{C}$ bei $\varphi(a) = 0$ in eine Taylorreihe im gewöhnlichen Sinne entwickeln, d.h. auf $\varphi(U)$ gilt:

$$f \circ \varphi^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f \circ \varphi^{-1})^{(n)}}{n!} z^n$$

Daher bezeichnen wir mit

$$T[f, a, \varphi] := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f \circ \varphi^{-1})^{(n)}}{n!} \varphi^n$$

Die *Taylorreihe von f bei a in Bezug auf φ.*

2 Ketten und Homologien

Lemma 2.1 (Kompatibilität)**.** Die Forster-Homologie ist äquivalent zur TopoII-Homologie.

Beweis. Seien $c, c' \in Z_1(X)$. Dann heißen c, c' im TopoII-homolog, falls sie sich um einen Rand unterscheiden, d.h. falls gilt:

$$\exists a \in Z_2(X) : c - c' = \partial a, \text{ wobei } a = \sum_i n_i \sigma_i, \text{ mit } n_i \in \mathbb{Z}$$

und die $\sigma_i : \Delta^2_{top} \to X$ sind singuläre Simplices. Dann ist für jede geschlossene Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$:

$$\int_{c-c'} \omega = \sum_i n_i \int_{\partial_2 \sigma_i} \omega = \sum_i n_i \int_{\sigma_i} d\omega = 0$$

Also sind c, c' auch Forster-homolog. □

3 Divisoren

Definition 3.1 (Divisor)**.** Sei X eine Riemannsche Fläche. Eine Abbildung

$$D : X \to \mathbb{Z}$$

heißt *Divisor* falls gilt: Für jede kompakte Teilmenge $K \subset X$ existieren nur endlich viele Punkte $x \in K$, sodass $D(x) \neq 0$. Die Divisoren auf X lassen sich kanonisch mittels der von $\mathbb{Z}$ induzierten Addition verknüpfen. Die Menge

$$\mathrm{Div}(X) := \{D : X \to \mathbb{Z} | D \text{ ist Divisor auf X}\}$$

wird damit zu einer abelschen Gruppe, der *Divisorengruppe auf X*. Wir definieren darauf eine Halbordnung: Für $D, D' \in \mathrm{Div}(X)$ sei $D \leq D'$, falls gilt: $\forall x \in X : D(x) \leq D'(x)$.
Für jeden Punkt $a \in X$ definieren wir den *charakteristischen Divisor* $D_a : X \to \mathbb{Z}$ durch $D_a(a) := +1$, und $D_a(x) := 0$ falls $x \neq a$.

Definition 3.2 (Divisor einer meromorphen Funktion)**.** Sei X eine Riemannsche Fläche, $Y \subset X$ eine offene Menge, $a \in Y$ und $f \in \mathcal{M}(X)$. Dann definiere

$$\operatorname{ord}_a(f) := \begin{cases} 0 & \text{,falls } f \text{ holomorph ist und } f(a) \leq 0 \\ k & \text{,falls } f \text{ einen Pol der Odnung } k \text{ bei } a \text{ hat} \\ -k & \text{,falls } f \text{ eine Nullstelle der Odnung } k \text{ bei } a \text{ hat} \\ \infty & \text{,falls } f \text{ eine Nullstelle unendlicher Ordnung bei } a \text{ hat} \end{cases}$$

Für jede meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X)\backslash 0$ ist die Abbildung $x \mapsto ord_x(f)$ ein Divisor auf X, welchen wir mit (f) bezeichnen. Eine meromorphe Funktion f heißt ein *Vielfaches des Divisors D* , falls $(f) \geq D$. Die Funktion f ist holomorph genau dann wenn $(f) \geq 0$.

Definition 3.3 (Divisor einer 1-Form)**.** Sei $\omega \in M^{(1)}(Y)\backslash 0$ eine meromorphe 1-Form und $a \in Y$. Sei (U, z) eine beliebiege Karte um a. Dann ist $\omega = fdz$ in einer Umgebung von a mit einer meromorphen Funktion $f \in M(U)$. Wir definieren die *Ordnung von ω bei a* als $\operatorname{ord}_a(\omega) := \operatorname{ord}_a(f)$. Diese Definition hängt nicht von der gewählten Karte ab. Für $\omega \in M^{(1)}(X)\backslash 0$ ist die Abbildung $x \mapsto ord_x(\omega)$ ebenfalls ein Divisor, welchen wir mit (ω) notieren.

Definition 3.4 (Hauptdivisoren / kanonische Divisoren)**.** Ein Divisor $D \in \operatorname{Div}(X)$ heißt *Hauptdivisor*, falls es eine Funktion $f \in \mathcal{M}(X)\backslash 0$ gibt, sodass $(f) = D$. Es bezeichne $D_p \subset D$ die Untergruppe aller Hauptdivisoren.
Zwei Divisoren $D, D' \in \operatorname{Div}(X)$ heißen *äquivalent*, falls $D - D'$ ein Hauptdivisor ist.
Ein Divisor $D \in \operatorname{Div}(X)$ heißt *kanonischer Divisor*, falls es eine 1-Form $\omega \in M^{(1)}(X)$ 0 gibt, sodass $(\omega) = D$.

Lemma 3.1 (Eigenschaften von Divisoren)**.** Für $f, g \in \mathcal{M}(X)\backslash 0$ und $\omega_1, \omega_2 \in M^{(1)(X)\backslash 0}$ gelten die folgenden Relationen:

(i) $(fg) = (f) + (g)$
(ii) $(1/f) = -f$
(iii) $(f\omega) = (f) + (\omega)$
(iv) (ω_1) ist äquivalent zu (ω_2).

Definition 3.5 (Grad eines Divisors)**.** Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann heißt die Abbildung $\deg : \operatorname{Div}(X) \to \mathbb{Z}$ mit $D \mapsto \sum_{x \in X} D(X)$ der *Grad von D*. Die Abbildung ist ein Gruppenhomomorphismus. Ihren Kern bezeichnen wir mit D_0.

4 Gitter und Periodengitter

Definition 4.1 (Gitter)**.** Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine additive Untergruppe $\Gamma \subset V$ heißt *Gitter*, falls es n linear unabhängige Vektoren $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in V$ gibt, sodass

$$\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_1 + \ldots + \mathbb{Z}\gamma_n = \operatorname{Lin}_{\mathbb{Z}}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$$

Lemma 4.1 (Kanonische Vektorraumtopologie)**.** Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann existiert genau eine Topologie $\mathcal{O}_V$ auf V, sodass jeder Isomorphismus $V \to \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus ist.

Beweis. Existenz: Nach dem Fundamentalsatz für endlich erzeugte Vektorräume existiert ein Isomorphismus $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$. Es sei der $\mathbb{R}^n$ mit der Standardtopologie versehen. Es sei O_V die Initialtopologie auf V bzgl. φ, d.h. die gröbste Topologie auf V, sodass φ stetig ist. Damit ist $\varphi : (V, \mathcal{O}_V) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n})$

also stetig und bijektiv. Die Umkehrfunktion φ^{-1} ist ebenfalls linear und damit wegen der Endlich-Dimensionalität der Räume auch stetig. Folglich ist φ ein Homöomorphismus.
Eindeutigkeit: Es sei $\mathcal{O}'$ eine weiterere Topologie auf V mit der Eigenschaft, dass jeder Isomorphismus $V \to \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus ist. Da Homöomorphie eine Äquivalenzrelation ist, folgt $(V, \mathcal{O}_V) \cong (\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}) \cong (V, \mathcal{O}')$ und somit $(V, \mathcal{O}_V) \cong (V, \mathcal{O}')$ also $\mathcal{O}_V = \mathcal{O}'$. □

Bemerkung 4.1. Durch Wahl einer beliebigen Norm $\| \|_{\mathbb{R}^n}$ auf $\mathbb{R}^n$ und eines beliebigen Isomorphismus $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ erhalten wir eine Norm $\| \|_V := \| \|_{\mathbb{R}^n} \circ \varphi$ auf V, welche diese Topologie metrisiert.

Konvention: Ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum V sei ab jetzt immer mit dieser kanonischen Topologie versehen.

Lemma 4.2 (Isoliation und Kompaktheit)**.** Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Vektorraum, $K \subset X$ kompakt und $D \subset X$ gleichmäßig diskret, d.h.

$$\exists U \in U(0) : \forall d \in D : (U + d) \cap D = \{d\}$$

Dann folgt: $K \cap D$ ist endlich.

Beweis. Sei $x_0 \in X$ und $d_0 \in D$ beliebig. Weil topologische Vektorräume nach Defintion hausdorffsch sind, existiert eine Umgebung V von 0, sodass $(x_0 + V) \cap (d_0 + V) = \emptyset$. Sei nun $U \in U(0)$ so gwählt, dass $\forall d \in D : (U + d) \cap D = \{d\}$. Dann ist $V \cap U =: W \in U(0)$ und es folgt:

$$\forall d \in D : (x_0 + W) \cap (d + W) = \emptyset$$

Damit kann D keine Häufungspunkte in X besitzen und ist somit abgeschlossen. Also ist $V \backslash D$ offen. Für jedes $d \in (D \cap K)$ sei $U(d)$ eine beliebige offene Umgebung von d, sodass $U(d) \cap D = d$. Damit ist

$$K \subset \bigcup_{d \in (D \cap K)} U(d) \cup (V \backslash D)$$

eine offene Überdeckung von K. Weil K kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $\bigcup_{i=1}^k U_{d_{n_i}} \cup V \backslash D$ von K. Und somit ist $K \cap D \subset \left(\bigcup_{i=1}^k U_{d_{n_i}} \cup V \backslash D \right) \cap D = \bigcup_{i=1}^k (U_{d_{n_i}} \cap D) \cup (V \backslash D \cap D) = \{d_{n_1}, \ldots, d_{n_k}\}$ endlich.

□

Satz 4.1 (Charakterisierung von Gittern)**.** Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Untergruppe $(\Gamma, +) \subset (V, +)$ ist genau dann ein ein Gitter, falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Γ ist *diskret*, d.h. es existiert eine Umgebung U von 0, sodass $\Gamma \cap U = \{0\}$.
(ii) Γ ist in keinem echten Unterraum von V enthalten, d.h. $\mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}(\Gamma) = V$.

Beweis. "$\Rightarrow$": Jedes Gitter $\Gamma = \mathrm{Lin}_{\mathbb{Z}}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ erfüllt sicherlich diese Eigenschaften: Für einen beliebigen Isomorphismus $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ erfüllt die Umgebung $U := \varphi^{-1}(B_{1/2}(0))$ Eigenschaft (i). Sei W ein Unterraum von V, der Γ enthält. Da nach Voraussetzung die $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ linear unabhängig sind, muss gelten $\dim(W) = n = \dim(V)$, woraus folgt, dasss $U = V$.
"$\Leftarrow$": Wir nehmen nun umgekehrt an, dass $\Gamma \subset V$ eine Untergruppe ist, welche die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt. Wir wollen nun durch Induktion nach $n = \dim_{\mathbb{R}}(V)$ zeigen, dass es n linear unabhängige Vektoren $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in V$ gibt, sodass $\Gamma = \mathrm{Lin}_{\mathbb{Z}}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$.
Induktionsverankerung ($n = 0$): In diesem Fall ist $V = \{0\}$ und somit muss $\Gamma = 0$ sein. Und per Konvention gilt $\mathrm{Lin}_{\mathbb{Z}}(\emptyset) = \{0\}$. Dies ist ein Gitter, da von 0 linear unabhängigen Vektoren (=gar keinen) erzeugt wird.

Induktionsschluss ($(n-1) \to n$): Da Γ Eigenschaft (ii) erfüllt, gibt es zumindest n linear unabhängige Vektoren $x_1, \ldots, x_n \in \Gamma$. Sei $V_{n-1} := \mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ und $\Gamma_{n-1} := \Gamma \cap V_{n-1}$. Da $\dim_{\mathbb{R}}(V_{n-1}) = n-1$ existieren nach Induktionsvoraussetzung $n-1$ linear unabhängige Vektoren $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1} \in \Gamma_{n-1} \subset \Gamma$, sodass

$$\Gamma_{n-1} = \mathrm{Lin}_{\mathbb{Z}}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1})$$

Da nach Konstruktion $V = V_{n-1} \oplus \mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}(x_n)$ existieren auch für jeden Vektor $x \in \Gamma$ eindeutig bestimmte Zahlen $c_1(x), \ldots, c_{n-1}(x), c_n(x) \in \mathbb{R}$, sodass

$$x = \sum_{j=1}^{n-1} c_j(x)\gamma_j + c_n(x)x_n$$

Das Parallelotop

$$P := \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \gamma_j + \lambda_n x_n | \lambda_j \in [0,1] \right\}$$

ist als stetiges Bild des kompakten Einheitswürfels kompakt. Da Γ nach Eigenschaft (i) diskret ist, folgt mit Lemma 4.2, dass $P \cap \Gamma$ endlich ist. Es ist außerdem $(P \cap \Gamma) \backslash V_{n-1} \neq \emptyset$, da z.B. $x_n \in (P \cap \Gamma) \backslash V_{n-1}$. Also existiert ein Vektor $\gamma_n \in (\Gamma \cap P) \backslash V_{n-1}$, sodass

$$c_n(\gamma_n) = \min \{ c_n(x) | x \in (\Gamma \cap P) \backslash V_{n-1} \} =: \tau \in]0,1]$$

Es ist damit $\gamma_n = \tau x_n$. Wir behaupten, dass für dieses γ_n gilt: $\Gamma = \Gamma_{n-1} + \mathbb{Z}\gamma_n$. Sei dazu $x \in \Gamma$ beliebig gewählt und dargestellt durch

$$x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \gamma_j \ ,\xi_j \in \mathbb{R}$$

Nun existiert für alle $1 \leq j \leq n$ eine eindeutige Darstellung $\xi_j = n_j + \lambda_j$, wobei $n_j \in \mathbb{Z}$ und $\lambda_j \in [0,1[$. Damit ist weiter

$$x = \sum_{j=1}^{n} (n_j + \lambda_j)\gamma_j = \sum_{j=1}^{n} n_j \gamma_j + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \gamma_j$$

und folglich

$$x' := x - \sum_{j=1}^{n} n_j \gamma_j = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \gamma_j + \lambda_n \tau x_n \in \Gamma \cap P$$

Es ist jedoch $c_n(x') = \tau \lambda_n < \tau = c_n(\gamma_n)$. Daraus folgt aufgrund der Minimalität von $c_n(\gamma_n)$, dass $\lambda_n = 0$. Also ist $x' \in \Gamma \cap V_{n-1} = \Gamma_{n-1}$. Folglich gilt $\forall 1 \leq j \leq n-1 : \lambda_j \in \mathbb{Z}$ und gleichzeitig $0 \leq \lambda_j < 1$, woraus folgt, dass $x' = 0$. Daraus folgt aber

$$x = \sum_{j=1}^{n} n_j \gamma_j \in \mathrm{Lin}_{\mathbb{Z}}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$$

□

Definition 4.2 (Periodengitter)**.** Es sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geq 1$. Es sei $\omega_1, \ldots, \omega_g$ eine Basis von $\Omega(X)$. Dann heißt

$$\operatorname{Per}(\omega_1, \ldots, \omega_g) := \left\{ \left(\int_\alpha \omega_1, \ldots, \int_\alpha \omega_g \right) | \alpha \in \pi_1(X) \right\} \subset \mathbb{C}^g$$

das *Periodengitter von X bzgl. $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$*.

Bemerkung 4.2. Wir halten fest:

(i) Aus der Homotopieinvarianz des Integrals über holomorphe 1-Formen folgt, dass ein Periodengitter wohldefiniert ist ([1] 10.11).

(ii) Aus der Linearität des Integrals folgt, das ein Periodengitter eine Untergruppe des $\mathbb{C}^g$ bildet.

(iii) Der $\mathbb{C}^g$ ist ein $2g$-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Wir werden zeigen, dass das Periodengitter tatsächlich ein Gitter ist.

(iv) Da es gemäß [1] 20.4 einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\pi_1(X) \to H_1(X)$ gibt, gilt auch:

$$\operatorname{Per}(\omega_1, \ldots, \omega_g) = \left\{ \left(\int_\alpha \omega_1, \ldots, \int_\alpha \omega_g \right) | \alpha \in H_1(X) \right\}$$

Lemma 4.3. Es sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g. Dann existieren g verschiedene Punkte $a_1, \ldots, a_g \in X$ mit der folgenden Eigenschaft:

$$\forall \omega \in \Omega(X) : \omega(a_1) = \ldots = \omega(a_g) = 0 \Rightarrow \omega = 0$$

Beweis. Für ein beliebiges $a \in X$ definiere

$$H_a := \{\omega \in \Omega(X) : \omega(a) = 0\}$$

□

Satz 4.2 (Periodengitter sind Gitter)**.** Sei X eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geq 1$ und $\omega_1, \ldots, \omega_g$ eine Basis von $\Omega(X)$. Dann ist $\Gamma := \operatorname{Per}(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ ein Gitter in $\mathbb{C}^g$.

Beweis. Der Beweis erfolgt in drei Schritten, die letzendlich die Voraussetzungen des Satzes 4.1 über Charakterisierungen von Gittern verifiziert.

(i) Zunächst wählen wir die Punkte $a_1, \ldots, a_g$ so wie in Lemma 4.3 und dazu einfach zusammenhängende zentrierte Karten (U_j, z_j) von a_j. Bezüglich dieser Karten hat jede Form ω_i auf U_j eine Darstellung

$$\omega_i = \varphi_{ij} dz_j$$

Die Matrix $A := (\varphi_{ij}(a_j))_{1 \leq i,j \leq g} \in \mathbb{C}^{g \times g}$ hat Rang g, weil nach Voraussetzung die $\omega_1, \ldots, \omega_g$ $\mathbb{C}$-linear unabhängig sind.

Für jedes $1 \leq i \leq g$ definieren wir nun eine Abbildung $F_i : U_1 \times \ldots \times U_g \to \mathbb{C}$ durch

$$x = (x_1, \ldots, x_g) \mapsto \sum_{j=1}^{g} \int_{a_j}^{x_j} \omega_i$$

Das Integral $\int_{a_j}^{x_j} \omega_i$ sei dabei durch das Integral über irgendeine ganz in U_j verlaufende Kurve von a_j nach x_j definiert. Dies ist wohldefiniert, weil alle U_j nach Voraussetzung einfach zusammenhängend sind.
Damit definieren wir nun komponentenweise eine Abbildung $F : U_1 \times \cdots \times U_g \to \mathbb{C}^g$ mittels

$$x = (x_1, \dots, x_g) \mapsto (F_1(x), \dots, F_g(x))$$

Für jedes feste j ist die Abbildung $x_j \mapsto \int_{a_j}^{x_j} \omega_i$ komplex differenzierbar und daher gilt dies auch für F. Es gilt für jedes $0 \le i \le g$ dass:

$$\frac{\partial F_i}{\partial z_j}(x) = \frac{\partial}{\partial z_j}\left(\sum_{k=1}^{g} \int_{a_k}^{x_k} \omega_i\right) = \frac{\partial}{\partial z_j} \int_{a_j}^{x_j} \varphi_{ij} dz_j = \varphi_{ij}(x_j)$$

Also gilt für die Jacobi-Matrix J_F von F:

$$J_F(x) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial z_j}(x)\right) = (\varphi_{ij}(x_j))$$

Nach obiger Überlegung ist damit also speziell im Punkt $a := (a_1, \dots, a_g)$ die Matrix $J_F(a) = A$ invertierbar und damit ein lokaler Diffeomorphismus. Also ist o.B.d.A.

$$W := F(U_1 \times \dots \times U_g) \subset \mathbb{C}^g$$

eine Umgebung von $F(a) = 0$.

(ii) Wir zeigen jetzt, dass $\Gamma \cap W = \{0\}$. Angenommen, das wäre nicht der Fall. Dann gäbe es einen Punkt $t \in \Gamma \cap (W \setminus \{0\})$. Weil F invertierbar ist, existiert dann ein Punkt $x \in U_1 \times \ldots \times U_g \subset X^g$ mit

$$a \neq x \in U_1 \times \dots \times U_g, \;\text{ und } F(x) \in \Gamma$$

Aus $x \neq a$ folgt, dass die beiden Vektoren in $1 \le k \le g$ Komponenten verschieden sind. Es seien die Komponenten o.B.d.A. bereits so umnummeriert, dass

$$\forall 1 \le j \le k : x_j \neq a_j \text{ und } \forall j > k : x_j = a_j$$

Wir behaupten nun, dass es eine Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ gibt, sodass gilt: $\forall 1 \le j \le k$ hat f bei a_j eine einfache Polstelle und bei x_j eine einfache Nullstelle. Wir behaupten also, dass der Divisor $D \in \mathrm{Div}(X)$ mit

$$\forall 1 \le j \le k : D(a_j) = 1 \text{ und } D(x_j) = -1$$

ein Hauptdivisor ist. Dazu verifizieren wir die Voraussetzungen des Satzes von Abel: Es ist sicherlich $\deg(D) = 0$. Es sei für $1 \le j \le k$ $\gamma_j : [0,1] \to X$ eine Verbindungskurve von x_j nach a_j, d.h. $\gamma_j(0) = x_j$ und $\gamma_j(1) = a_j$. Dann ist $c := \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \in C_1(X)$. Ferner ist

$$\partial c(x_j) = \partial c(\gamma_j(0)) = -1 \qquad\qquad \partial c(a_j) = \partial c(\gamma_j(1)) = +1$$

und somit insgesamt $\partial c = D$. Ferner gilt für ein beliebiges $1 \le i \le g$:

$$\int_c \omega_i = \sum_{j=1}^{k} \int_{x_j}^{a_j} \omega_i = \sum_{j=1}^{g} \int_{x_j}^{a_j} \omega_i = -F_i(x)$$

Nach dem Satz von Abel ([1] 20.7) existiert also ein $f \in \mathcal{M}(X)$ mit $(f) = D$. Es sei $c_j z_j^{-1}$ der Hauptteil von f bei a_j. Nach Konstruktion ist $\forall 1 \le j \le k : c_j \neq 0$. Nach dem Residuensatz [1] 10.21 gilt jedoch:

$$0 = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}_{a_j}(f\omega_i) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}_{a_j}(f\varphi_{ij} dz_j) = \sum_{j=1}^{k} c_j \varphi_{ij}(a_j)$$

Da die Matrix $(\varphi_{ij}(a_j))$ Rang g hat, folgt, dass andererseits für alle $1 \leq j \leq k$ gilt: $c_j = 0$. Widerspruch!

(iii) Wir zeigen nun, dass Γ nicht in einem echten reellen Unterraum von $\mathbb{C}^g$ enthalten sein kann. Angenommen, es gäbe doch einen reellen Unterraum U (d.h. U ist nur gegen Skalarmultiplikation mit reellen Zahlen abgeschlossen), sodass $\Gamma \subset U \subset \mathbb{C}^g$. Dann wäre $\mathbb{C}^g = U \oplus_{\mathbb{R}} U'$ mit $\dim_{\mathbb{R}}(U') > 0$. Es gibt dann eine nicht-triviale reelle Linearform, die auf U verschwindet, d.h. eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $r : \mathbb{C}^g \to \mathbb{R}$ mit $r|_U = 0$, jedoch $r \neq 0$. Es existiert dann eine $\mathbb{C}$-Linearform $c : \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}$, sodass $\mathrm{Re}(c) = r$. Den Beweis dafür führen wir im folgenden Lemma 4.4. Dann gilt für den komplexen Koordinatenvektor $v := (c_1, \ldots, c_g)$ von c bezüglich der komplexen kanonischen Basis von $\mathbb{C}^g$, dass $v \neq 0$. Es ist insbesondere mindestens ein $c_j \neq 0$. Für ein beliebiges $\alpha \in \pi_1(X)$ ist $u := (\int_\alpha \omega_1, \ldots, \int_\alpha \omega_g) \in U$ und somit ist

$$0 = r(u) = \mathrm{Re}(c(u)) = \mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{g} c_j \int_\alpha \omega_j\right) = \mathrm{Re}\left(\int_\alpha \sum_{j=1}^{g} c_j \omega_j\right)$$

Damit reduziert sich das Problem darauf zu zeigen, dass

$$\sum_{j=1}^{g} c_j \omega_j = 0$$

Da $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ nach Voraussetzung eine Basis von $\Omega(X)$ ist, folgt, dass für alle $1 \leq j \leq g$ gilt $c_j = 0$. Widerspruch! Obige Gleichung ist jedoch gerade Lemma [**?**].

□

Bemerkung 4.3. Wir wissen jetzt also, dass $\Gamma = \mathrm{Per}(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ ein Gitter in $V := \mathbb{C}^{2g}$ ist. Folglich existieren $2g$ geschlossene Kurven α_ν auf X, sodass für $\nu = 1, \ldots, 2g$ die Vektoren

$$\gamma_\nu := \left(\int_{\alpha_\nu} \omega_1, \ldots, \int_{\alpha_\nu} \omega_g\right)$$

über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind und dass

$$\mathrm{Per}(\omega_1, \ldots, \omega_g) = \mathrm{Lin}_{\mathbb{Z}}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g})$$

Also ist

$$\left\{\left(\int_\alpha \omega_1, \ldots, \int_\alpha \omega_g\right) | \alpha \in H_1(X)\right\} = \mathrm{Lin}_{\mathbb{Z}}\left(\left(\int_{\alpha_1} \omega_1, \ldots, \int_{\alpha_1} \omega_g\right), \ldots, \left(\int_{\alpha_{2g}} \omega_1, \ldots, \int_{\alpha_{2g}} \omega_g\right)\right)$$

Also sind sind Homologieklassen von $[\alpha_1], \ldots, [\alpha_{2g}]$ $\mathbb{Z}$-linear unabhängig und ergzeugen $H_1(X)$. Folglich ist $H_1(X) \cong \mathbb{Z}^{2g}$.

Lemma 4.4 ($\mathbb{C}$- und $\mathbb{R}$ - Linearität)**.** Zwischen $\mathbb{R}$- und $\mathbb{C}$-Linearität bestehen folgende Zusammenhänge:

(i) Eine $\mathbb{R}$ - lineare Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann $\mathbb{C}$ - linear, wenn ihre Koordinatenmatrix c_f bezüglich der kanonischen Basis $(1, i)$ von der Form ist

$$c_f = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(ii) Für jede $\mathbb{R}$-Linearform $r : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ existiert genau eine $\mathbb{C}$-Linearform $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sodass $\mathrm{Re}(c) = r$.

(iii) Für jede $\mathbb{R}$-Linearform $r : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ existiert genau eine $\mathbb{C}$-Linearform $c : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, sodass $\mathrm{Re}(c) = r$.

Beweis. Wir identifiziern durchweg $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$. Alle Koordinatenmatrizen beziehen sich auf die kanonische Basis.

(i) "$\Rightarrow$": Wir notieren die komplexe Multiplikation mit $\bullet$ und die reelle Matrixmultiplikation mit $\cdot$. Dann folgt:

(ii) Eine solche $\mathbb{R}$-Linearform besitzt eine Koordinatenmatrix der Form (r_1, r_2). Es ist also

$$r(z) = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = r_1 z_1 + r_2 z_2$$

Nach Teil (i) ist c genau dann $\mathbb{C}$-linear, falls $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existieren, sodass

$$c(z) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z_1 - \beta z_2 \\ \beta z_1 + \alpha z_2 \end{pmatrix}$$

Die Zahlen $\alpha := r_1$ und $\beta := -r_2$ erfüllen dann die gewünschten Bedingungen und c ist dadurch bereits eindeutig festgelegt.

(iii) Schreiben wir eine komplexe Zahl $z_j = \xi_j + i\eta_j$, so gilt für eine solche $\mathbb{R}$-Linearform:

$$r(z) = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_{2n-1} & r_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (r_j \xi_j + r_{j+1} \eta_j)$$

Und ebenfalls analog für eine solche $\mathbb{C}$-Linearform:

$$c(z) = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} c_j z_j = \sum_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_j \\ \eta_j \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} \alpha_j \xi_j - \beta_j \eta_j \\ \beta_j \xi_j + \alpha_j \eta_j \end{pmatrix}$$

Daraus folgt die Behauptung, indem wir (ii) auf jeden Summanden anwenden.

□

Lemma 4.5. Sei X kompakte Riemannsche Fläche und $\omega \in \Omega(X)$. Dann gilt:

$$\forall \gamma \in \pi_1(X) : \int_\gamma \omega = 0 \Rightarrow \omega = 0$$

Beweis. siehe [**?**], 19.8 □

Für den nächsten Abschnitt benötigen wir noch ein Lemma über Gitter:

Lemma 4.6 (Isomorphie von Gittern)**.** Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und es seien $\Gamma := \mathrm{Lin}_{\mathbb{Z}}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ und $\Delta := \mathrm{Lin}_{\mathbb{Z}}(\delta_1, \dots, \delta_n)$ zwei Gitter in V. Dann existiert ein Isomorphismus von additiven Gruppen

$$V/\Gamma \to V/\Delta$$

Beweis. Da V, Γ, Δ alle abelsch sind, sind Γ und Δ sicherlich Normalteiler in V und somit sind beide Quotienten tatsächlich Gruppen. Weil beide Vektorsysteme $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ und $(\delta_1, \dots, \delta_n)$ linear unabhängig sind, ist die lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ mit $\forall 0 \leq i \leq n : \gamma_i \mapsto \delta_i$ ein Vektorraum-Isomorphismus, für den also gilt $\varphi(\Gamma) = \Delta$. Definiere $\Psi : V/\Gamma \to V/\Delta$ durch $[x] \mapsto [\varphi(x)]$. Wir zeigen:
Wohldefiniertheit: Für $y \backsim x$ folgt $y - x \in \Gamma$ und somit $\varphi(y - x) = \varphi(y) - \varphi(x) \in \Delta$. Also ist $\varphi(y) \backsim \varphi(x)$.
Injektivität: Sei $[\varphi(x)] = [\varphi(y)]$, also $\varphi(y) - \varphi(x) = \varphi(y - x) \in \Delta$. Weil φ ein Isomorphismus ist, ist $y - x \in \varphi^{-1}(\Delta) = \Gamma$ und somit $[y] = [x]$.
Surjektivität: Für $[y] \in V/\Delta$ ist mit $x := \varphi^{-1}(y)$ sicherlich $\Psi([x]) = [y]$. □

5 Das Jacobische Umkehrproblem

Definition 5.1 (Jacobi-Varietät)**.** Es sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g und $\omega_1, \dots, \omega_g$ eine beliebige Basis von $\Omega(X)$. Dann heißt

$$\operatorname{Jac}(X) := \mathbb{C}^g / \operatorname{Per}(\omega_1, \dots, \omega_g)$$

Jacobi-Varietät von X

Bemerkung 5.1. Wir halten fest:

(i) Wir können $\operatorname{Jac}(X)$ als Quotient zweier Gruppen auffassen. Algebraisch gesehen handelt es sich also um eine Faktorgruppe. Da wir aber schon gezeigt haben, dass $\operatorname{Per}(\omega_1, \dots, \omega_g)$ ein Gitter im $\mathbb{C}^g$ ist (Satz 4.2), handelt es sich topologisch gesehen um einen komplex g-dimensionalen Torus. Diesen könnte man sogar mit einer komplexen Struktur versehen und ihn so zu einer komplexen Mannigfaltigkeit machen. Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung der Gruppenstruktur.

(ii) Die Definition von $\operatorname{Jac}(X)$ hängt von der Wahl der Basis $\omega_1, \dots, \omega_g$ ab. Wie jedoch in Lemma 4.6 gezeigt, führt die Wahl einer anderen Basis zu einer isomorphen Jacobi-Varietät.

Definition 5.2 (Picard-Gruppe)**.** Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann heißt

$$\operatorname{Pic}(X) := \operatorname{Div}(X) / \operatorname{Div}_p(X)$$

die *Picard-Gruppe von X*. Da eine meromorphe Funktion genauso viele Nullstellen wie Polstellen besitzt, ist $\operatorname{Div}_p \subset \operatorname{Div}_0$ ein Normalteiler und wir können auch die Untergruppe

$$\operatorname{Pic}_0 := \operatorname{Div}_0(X) / \operatorname{Div}_p(X) \subset \operatorname{Pic}(X)$$

definieren.

Bemerkung 5.2. Diese Untergruppenrelationen machen die folgende kurze Sequenz exakt:

$$0 \to \underbrace{\operatorname{Div}_0(X) / \operatorname{Div}_p(X)}_{=\operatorname{Pic}_0(X)} \hookrightarrow \underbrace{\operatorname{Div}(X) / \operatorname{Div}_p(X)}_{=\operatorname{Pic}(X)} \twoheadrightarrow \underbrace{\operatorname{Div}(X) / \operatorname{Div}_0(X)}_{\cong \mathbb{Z}} \to 0$$

Dabei liefert $\deg : \operatorname{Div}(X) / \operatorname{Div}_0(X) \to \mathbb{Z}$ gerade den behaupteten Isomorphismus.

Bevor wir nun das Jacobische Umkehrproblem hinschreiben können, benötigen wir ein Lemma, dass dessen Wohldefiniertheit garantiert.

Lemma 5.1. Für jede Riemannsche Fläche X gilt:

(i) Der Randoperator $\partial : C_1(X) \to \operatorname{Div}_0(X)$ ist surjektiv.

(ii) Ist $D \in \operatorname{Div}_0(X)$ und $c \in C_1(X)$ mit $\partial c = D$, dann ist der Vektor $(\int_c \omega_1, \dots, \int_c \omega_g)$ in $\mathbb{C}^g$ durch D eindeutig bestimmt bis auf Äquivalenz modulo $\operatorname{Per}(\omega_1, \dots, \omega_g)$.

Beweis. (i) Ist $D \in \mathrm{Div}_0(X)$, so bedeutet dies nach Definition, dass $\deg(D) = 0$. Der Träger von D kann als die disjunkte Vereinigung zweier endlicher Punktmengen $P, N \subset X$ geschrieben werden, sodass $\forall p \in P : D(p) > 0$ und $\forall n \in N : D(n) < 0$. Aus der Menge P kann man ein Tupel $\tilde{P}$ gewinnen indem man jedes $p \in P$ dort $D(p)$ mal einträgt. Analog erhält man ein Tupel $\tilde{N}$. Nach Voraussetzung haben diese dann dieselbe Länge. Da X nach Definition wegzusammenhängend ist, kann man Kurven γ_i wählen, die jeweils p_i mit n_i verbinden. Die Summe dieser Kurven ist nach Konstruktion eine Kette in $C_1(X)$ deren Rand gerade D ist.

(ii) Seien $c_1, c_2 \in C_1(X)$ sodass $\partial c_1 = D = \partial c_2$. Dann ist also $\partial(c_2 - c_1) = 0$. Damit ist $c_2 - c_1 \in \ker \partial$ und damit sind insbesondere die Homologieklassen $c_2 - c_1 \in H_1(X)$. Folglich ist

$$\left(\int_{c_2} \omega_1, \dots, \int_{c_2} \omega_g\right) - \left(\int_{c_1} \omega_1, \dots, \int_{c_1} \omega_g\right) = \left(\int_{c_2 - c_1} \omega_1, \dots, \int_{c_2 - c_1} \omega_g\right)$$
$$\in \mathrm{Per}(\omega_1, \dots, \omega_g) = \left\{\left(\int_c \omega_1, \dots, \int_c \omega_g\right) | c \in H_1(X)\right\}$$

□

Definition 5.3 (Jacobisches Umkehrproblem)**.** Es sei $\Phi : \mathrm{Div}_0 \to \mathrm{Jac}(X)$ die Abbildung

$$D \mapsto \left[\left(\int_{\partial^{-1}(D)} \omega_1, \dots, \int_{\partial^{-1}(D)} \omega_g\right)\right]$$

Dies ist gemäß Lemma 5.1 ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus. Nach dem Satz von Abel ([1] 20.7) ist der Kern von Φ gerade Div_p (siehe auch Lemma 5.2) Durch Übergang zum Quotienten erhalten wir also eine injektive Abbildung

$$j : \mathrm{Div}_0 / \ker(\Phi) = \mathrm{Div}_0 / \mathrm{Div}_p = \mathrm{Pic}_0 \hookrightarrow \mathrm{Jac}(X)$$

Die Frage, ob diese Abbildung auch surjektiv und damit ein Isomorphismus ist, heißt *Jacobisches Umkehrproblem.*

Lemma 5.2. Es ist tatsächlich $\ker \Phi = \mathrm{Div}_p$.

Beweis. Sei $\Phi(D) = [0]$. Dann existiert ein $\gamma \in C_1(X)$ mit $\partial\gamma = D$, sowie eine durch $\alpha \in Z_1(X)$ repräsentierte Homologieklasse $[\alpha] \in H_1(X)$, sodass

$$0 = \left(\int_\gamma \omega_1, \dots, \int_\gamma \omega_g\right) - \left(\int_\alpha \omega_1, \dots, \int_\alpha \omega_g\right)$$

Daraus folgt aber gerade

$$\forall 0 \leq j \leq g : \int_\gamma \omega_j = \int_\alpha \omega_j$$

Da nach Voraussetzung ohnehin $\deg(D) = 0$ ist dies eine hinreichende Verifikation für die Voraussetzungen des Satzes von Abel. Es ist also $D \in \mathrm{Div}_p$.
Ist umgekehrt $D \in \mathrm{Div}_p$, so existiert ein $c \in C_1(X)$ mit $\partial c = D$, sodass

$$\forall \omega \in \Omega(X) : \int_c \omega = 0$$

Und damit ist sicherlich

$$\Phi(D) = \left[\left(\int_c \omega_1, \ldots, \int_c \omega_g\right)\right] = [0]$$

□

Satz 5.1 (Jacobischer Umkehrsatz I)**.** Für jede kompakte Riemannsche Fläche X ist die Abbildung

$$j : \mathrm{Pic}_0 \to \mathrm{Jac}(X)$$

ein Isomorphismus. Das Jacobische Umkehrproblem ist also immer lösbar.

Beweis. Es bleibt nur noch die Surjektivität zu zeigen. Sei dazu $[\xi] \in \mathrm{Jac}(X)$ eine beliebige durch den Vektor $\xi \in \mathbb{C}^g$ repräsentierte Äquivalenzklasse. Wir erinnern an die Abbildung $F : U_1 \times \cdots \times U_g \to \mathbb{C}^g$ aus dem Beweis zu Satz 4.2 mit $F_i(x) = \sum_{j=1}^g \int_{a_j}^{x_j} \omega_i$. Wie dort diskutiert ist das Bild von F eine Umgebung von 0. Also existiert eine hinreichend große Zahl $N \in \mathbb{N}$, sodass $(1/N)\xi \in \mathrm{im}(F)$. Da F dort ein Diffeomorphismus ist, existiert ein Urbild $F^{-1}\left((1/N)\xi\right) =: (x_1, \ldots, x_g)$ und für jedes $1 \leq j \leq g$ Punkte $a_j \in X$ aus Lemma 4.3, sowie Kurven γ_j von a_j nach x_j. Ausgedrückt durch die Kette $c := \sum_{j=1}^g \gamma_g$ gilt damit insgesamt:

$$\left(\int_c \omega_1, \ldots, \int_c \omega_g\right) = \frac{1}{N}\xi$$

Es sei nun $D \in \mathrm{Div}_0(X)$ der durch $D := \partial c$ definierter Divisor. Für diesen gilt nach Konstruktion von Φ:

$$\Phi(D) = \left[\left(\int_c \omega_1, \ldots, \int_c \omega_g\right)\right] = \left[\frac{1}{N}\xi\right]$$

Der Divisor ND hat immernoch Grad 0. Also ist $ND \in \mathrm{Div}_0(X)$ und somit $[ND] \in \mathrm{Pic}_0(X)$. Folglich ist

$$j([ND]) = [N\Phi(D)] = [N\frac{1}{N}\xi] = [\xi]$$

□

Satz 5.2 (Jacobischer Umkehrsatz II)**.** Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g und $j : \mathrm{Pic}_0 \to \mathrm{Jac}(X)$ wie oben. Es seien weiterhin $a_1, \ldots, a_g \in X$ beliebig gewählt und $\Psi : X^g \to \mathrm{Pic}_0(X)$ die Abbildung

$$(x_1, \ldots, x_g) \mapsto \sum_{j=0}^{g} (D_{x_j} - D_{a_j}) \mod \mathrm{Div}_p(X)$$

Es sei $J : X^g \to \mathrm{Jac}(X)$ die Komposition $J := j \circ \Psi$. Dann gilt

$$J(x_1, \ldots, x_g) = \left(\sum_{k=1}^{g} \int_{a_k}^{x_k} \omega_i\right)_{1 \leq i \leq g} \mod \mathrm{Per}(\omega_1, \ldots, \omega_g)$$

und J ist ebenfalls surjektiv.

Beweis. Wir machen uns zunächst klar, warum J von der behaupteten Gestalt ist: Es seien $x_1, \ldots, x_g \in X$ beliebig gewählt. Dann ist zunächst:

$$J(x_1, \ldots, x_g) = j\left(\Psi(x_1, \ldots, x_g)\right) = j\left(\left[\sum_{k=1}^{g} D_{x_k} - D_{a_k}\right]\right)$$

Es sei nun für jedes $1 \leq k \leq g$ die Abbildung $\gamma_k : [0,1] \to X$ eine Kurve von a_k nach x_k. Wir gehen zunächst davon aus, dass $a_k \neq x_k$. Dann ist nach Definition

$$(\partial\gamma_k)(x) = \begin{cases} +1 & \text{falls } x = \gamma_k(1) = x_k \\ -1 & \text{falls } x = \gamma_k(0) = a_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (D_{x_k} - D_{a_k})(x) = \begin{cases} +1 & \text{falls } x = x_k \\ -1 & \text{falls } x = a_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Falls doch $a_k = x_k$ gilt nach Definition $\partial\gamma_k = D_{x_k} - D_{a_k} = 0$. Also ist in jedem Fall $\partial\gamma_k = D_{x_k} - D_{a_k}$. Somit ist $c := \sum_{k=1}^{g} \gamma_k \in C_1(X)$ eine Kette mit $\partial c = D := \sum_{k=1}^{g} (D_{x_k} - D_{a_k})$. Also ist

$$j\left(\left[\sum_{k=1}^{g} D_{x_k} - D_{a_k}\right]\right) = \left[\left(\int_c \omega_i\right)_{1\leq i\leq g}\right] = \left[\left(\sum_{k=1}^{g} \int_{a_k}^{x_k} \omega_i\right)_{1\leq i\leq g}\right]$$

wie behauptet.
Da J die Komposition von j mit Ψ ist und wir schon wissen (Satz 5.1), dass j surjektiv ist, genügt es zu zeigen, dass Ψ surjektiv ist. Sei dazu $D \in \mathrm{Div}_0(X)$. Wir müssen zeigen, dass nun Punkte $(x_1, \ldots, x_g)$ existieren, sodass

$$\sum_{k=1}^{g} D_{x_k} - D_{a_k} = D \mod \mathrm{Div}_p(X)$$

Dies sieht man wie folgt: Definiere zunächst den Divisor

$$D' := D + \sum_{k=1}^{g} D_{a_k}$$

Dann ist sicherlich $\deg(D') = g$. Nach dem Satz von Riemann-Roch ([1] 16.9) gilt daher:

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) = 1 - g + \deg(D') + \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \geq 1$$

Nach Definition ist ja gerade

$$H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) \cong \mathcal{O}_{\mathcal{D}'}(X) = \left\{f \in \mathcal{M}(X) | \forall x \in X : \mathrm{ord}_x(f) \geq -D'(x)\right\}$$

und daher existiert also eine meromorphe Funktion $f \neq 0$ mit $(f) \geq -D'$, d.h. es gilt

$$D'' := (f) + D' \geq 0$$

Nun ist auch $\deg(D'') = \deg((f)) + \deg(D') = 0 + g = g$. Folglich existieren g (nicht notwendig verschiedene) Punkte $x_1, \ldots, x_g \in X$, sodass

$$D'' = \sum_{k=1}^{g} D_{x_k}$$

Damit erhalten wir insgesamt:

$$\sum_{k=1}^{g} D_{x_k} = D'' = (f) + D' = (f) + D + \sum_{k=1}^{g} D_{a_k}$$

also wie gewünscht:

$$\sum_{k=1}^{g} (D_{x_k} - D_{a_k}) = D + (f)$$

$\square$

Corrolar 5.1. Für jede kompakte Riemannsche Fläche X vom Geschlecht $g = 1$ ist die Abbildung $J : X \to \mathrm{Jac}(X)$ ein Isomorphismus.

Beweis. Die Gestalt der Abbildung J vereinfacht sich nun erheblich: Sei $\omega \in \Omega(X)\backslash\{0\}$, $\Gamma := \mathrm{Per}(\omega)$ und $a \in X$. Dann gilt:

$$J(x) = \int_a^x \omega \mod \Gamma \in \mathbb{C}/\Gamma = \mathrm{Jac}(X)$$

Die Abbildung J ist dann sicherlich holomorph und nach dem Jacobischen Umkehrsatz II (5.2) surjektiv. Hier ist J aber auch injektiv. Denn angenommen, es gäbe $x, y \in X$ mit $x \neq y$, jedoch:

$$J(x) = J(y) \Rightarrow \left[\int_a^x \omega\right] = \left[\int_a^y \omega\right] \Rightarrow \int_a^x \omega - \int_a^y \omega = \int_\alpha \omega$$

mit einem $\alpha \in \pi_1(X)$. Wir bezeichnen mit γ_x die Kurve von a nach x und mit γ_y die Kurve von a nach y und definieren die Kette $c := \gamma_x - \gamma_y - \alpha \in C_1(X)$, sowie den Divisor $D := \partial c \in \mathrm{Div}(X)$. Dann gilt:

$$\forall \omega \in \Omega(X) : \int_c \omega = 0$$

Damit sind die Voraussetzungen des Satzes von Abel ([1] 20.7) erfüllt und der Divisor D besitzt ein Lösung, d.h. eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ mit $(f) = D$. Nach Definition des Randoperators ∂ gilt:

$$\begin{array}{rrr}
(\partial\gamma_x)(a) = (\partial\gamma_x)(\gamma_x(0)) = -1 & (\partial\gamma_y)(a) = (\partial\gamma_y)(\gamma_y(0)) = -1 & (\partial\alpha)(a) = 0 \\
(\partial\gamma_x)(x) = (\partial\gamma_x)(\gamma_x(1)) = +1 & (\partial\alpha)(x) = 0 & \\
(\partial\gamma_x)(y) = 0 & (\partial\gamma_y)(y) = (\partial\gamma_y)(\gamma_y(1)) = +1 & (\partial\alpha)(y) = 0
\end{array}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
(f)(a) = D(a) = (\partial c)(a) = -1 - (-1) - 0 = 0 \\
(f)(x) = D(x) = (\partial c)(x) = +1 - 0 - 0 = +1 \\
(f)(y) = D(y) = (\partial c)(y) = 0 - 1 - 0 = -1
\end{aligned}$$

Die Funktion f hat also genau einen Pol der Ordnung 1 bei $x \in X$. Daraus folgt, dass X isomorph zu $\mathbb{P}^1$ ist. Das ist ein Widerspruch, weil isomorphe Riemannsche Flächen die gleichen Geschlechter haben. Nach Voraussetzung hat X Geschlecht 1, jedoch hat $\mathbb{P}^1$ Geschlecht 0 ([1] 13.5).

$\square$

Literatur

[1] Forster, Lectures on Riemann Surfaces