Diagonalisieren

Nikolai Nowaczyk <nikno@nullteilerfrei.de> http://math.nikno.de/
Lars Wallenborn <lars@wallenborn.net> http://www.wallenborn.net/

16.-18. März 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Matrizen

"Ich würde Ihnen ja mehr erzählen, aber dann müsste ich Sie töten."
James Bond, Geheimagent

1.1 Definition (Matrix)**.** Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Eine *reelle $m \times n$ Matrix A* ist ein zweidimensionales Tupel $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n}$ aus Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Die Menge aller solchen Matrizen schreibt man auch als $\mathbb{R}^{m\times n}$. Man nennt die a_{ij} auch die *Einträge* der Matrix A.

1.2 Definition (Matrixaddition)**.** Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dann heißt die Matrix $C := A + B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, deren Einträge definiert sind durch

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Summe von A und B.

1.3 Definition (Skalarmultiplikation)**.** Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $B := cA \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die Matrix mit den Einträgen

$$b_{ij} = ca_{ij}.$$

Diese Art von Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl heißt *Skalarmultiplikation.*

1.4 Definition (Matrixmultiplikation)**.** Für zwei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ist das Produkt $C := AB \in \mathbb{R}^{m \times k}$ die Matrix, deren Einträge definiert sind durch

$$c_{ij} := \sum_{\nu=1}^{m} a_{i\nu} b_{\nu j}.$$

1.5 Definition (Einheitsmatrix)**.** Die Matrix $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit den Einträgen

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

heißt *Einheitsmatrix*. Streng genommen ist das für jedes n eine andere Matrix. Wollen wir das in der Notation unterscheiden, schreiben wir E_n.

1.6 Definition (Nullmatrix)**.** Die Matrix $0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, deren Einträge ausschließlich aus Nullen besteht, heißt *Nullmatrix* und wird etwas schlampig ebenfalls mit 0 bezeichnet (obwohl dies eigentlich für unterschiedliches n unterschiedliche Matrizen sind).

1.7 Satz (Rechenregeln für Matrizen)**.** Es gelten folgende Regeln für das Rechnen mit Matrizen: Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

(i). $(A + B) + C = A + (B + C)$

(ii). $A + 0 = A$

(iii). $A + (-A) = 0$, wobei $-A := (-1)A$.

(iv). $A + B = B + A$.

(v). $(ab)A = a(bA)$.

(vi). $1A = A$

(vii). $(a + b)A = aA + bA$.

(viii). $a(A + B) = aA + aB$.

(ix). $A(BC) = (AB)C$.

Man sagt auch *der* $\mathbb{R}^{n \times n}$ *ist eine* $\mathbb{R}$*-Algebra*.

1.8 Definition (invertierbar)**.** Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *invertierbar*, falls es eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt, sodass

$$AB = BA = E.$$

Man schreibt dann auch $A^{-1} := B$. Die Menge aller invertierbaren Matrizen notieren wir mit $\mathrm{GL}(n)$. Das steht für *General Linear Group*.

1.9 Satz (Ausrechnen des Inversen)**.** Sei $A \in \mathrm{GL}(n)$. Dann lässt sich die Inverse A^{-1} durch das so genannte *simultane Gauß-Verfahren* ausrechnen

$$\begin{pmatrix} A & E \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} E & A^{-1} \end{pmatrix}$$

1.10 Satz (Determinante)**.** Es gibt eine Funktion $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$, genannt *Determinante* mit der Eigenschaft, dass

$$\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \in \mathrm{GL}(n) \iff \det(A) \neq 0.$$

Diese Funktion hat außerdem folgende Eigenschaften:

(i). $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

(ii). $\det(cA) = c^n \det(A)$, $c \in \mathbb{R}$,

(iii). $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$,

(iv). $\det(A) = \det(A^t)$

Theoretisch kann man die Determinante einer Matrix immer konkret ausrechnen. Es gilt nämlich für $n = 2$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \tag{1.1}$$

und für allgemeines $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die rekursive Vorschrift

$$\forall 1 \leq j \leq n : \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

wobei $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix ist, die aus A durch Streichung der i-ten Zeile und der j-ten Spalte hervorgeht.

1.11 Satz (Inverse von 2×2-Matrizen)**.** Für ein $A \in \mathrm{GL}(2)$ gibt es eine besonders schöne Formel für das Inverse

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2) \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

1.1 Einschub: Invertierbarkeit und Lineare Unabhängigkeit

1.12 Definition (linear unabhängig)**.** Ein System von Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ heißt *linear unabhängig*, falls für alle $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i v_i = 0 \Longrightarrow \forall 1 \leq i \leq n : c_i = 0.$$

1.13 Satz. Ein System von Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann linear unabhängig, falls die Matrix S bestehend aus dem Spaltensystem $S = (v_1, \ldots, v_n)$ invertierbar ist.

Damit können wir jetzt die Nicht-Invertierbarkeit einer Matrix charakterisieren.

1.14 Lemma.

(i). Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: Falls es ein $v \in \mathbb{R}^n$ gibt, sodass $v \neq 0$, aber $Av = 0$, dann ist A sicherlich nicht invertierbar.

(ii). Die Umkehrung gilt auch: Falls $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nicht invertierbar ist, dann gibt es ein $v \neq 0$, sodass $Av = 0$.

Beweis.

(i). Angenommen A wäre invertierbar. Dann existiert per Definition ihr Inverses A^{-1}, welches ebenfalls per Definition erfüllt:

$$v = Ev = A^{-1}Av = A^{-1}0 = 0.$$

Nach Voraussetzung ist aber $v \neq 0$. Widerspruch!

(ii). Sei $v \in \mathbb{R}^n$ irgendein Vektor. Schreibt man die Matrix A als System ihrer Spalten

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \end{pmatrix}$$

so gilt:

$$Av = \sum_{i=1}^{n} v_i A_i.$$

Daher sieht man mit dieser Gleichung ein: Wäre $Av \neq 0$ für alle Vektoren $v \neq 0$, dann wäre das Spaltensystem vom A linear unabhängig. Gemäß Satz 1.13 wäre also die Matrix A invertierbar. Wir hatten aber A als nicht invertierbar vorausgesetzt. Widerspruch!

□

2 Diagonalisieren

"Ganz einfach: Man muss nur den hydraulischen Phasenverschiebungsemulator nehmen und an die transdimensionale Photonenschleuder anschließen. Rumms! Neuer Turm."
Blutelfen-Pionier, Ingenieur

2.1 Definition (Diagonalmatrix)**.** Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *Diagonalmatrix* oder schlicht *diagonal*, falls gilt:

$$\forall 1 \leq i,j \leq n : i \neq j \implies a_{ij} = 0.$$

Mit anderen Worten: Alle Einträge von A sind Null, außer die auf der Hauptdiagonalen (von oben links nach unten rechts).

2.2 Bemerkung. Die Einheitsmatrix ist zum Beispiel eine Diagonalmatrix.

2.3 Lemma. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonal. Dann ist auch $C := AB$ diagonal und es gilt

$$\forall 1 \leq i \leq n : c_{ii} = a_{ii} b_{ii}.$$

Daher ist eine diagonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar genau dann, wenn alle ihre Diagonaleinträge ungleich Null sind.

2.4 Bemerkung. Das Rechnen mit Diagonalmatrizen ist also erheblich einfacher als mit allgemeinen Matrizen. Daher hätte man gerne ein Verfahren, um aus einer beliebigen Matrix eine Diagonalmatrix zu machen. Dieses Verfahren heißt *Diagonalisieren* und soll im folgenden erklärt werden.

2.5 Definition (diagonalisierbar)**.** Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *diagonalisierbar*, falls es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(n)$ gibt, sodass $S^{-1}AS$ diagonal ist.

2.6 Bemerkung. Wir wollen uns im Folgenden damit beschäftigen, Kriterien zu entwickeln, wann man eine solche Matrix S finden kann und wie.

2.7 Definition (Eigenwert)**.** Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt *Eigenwert von A*, falls es einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ gibt, sodass $v \neq 0$ und

$$Av = \lambda v.$$

Wir nennen v dann einen *Eigenvektor von A zum Eigenwert* λ. Wir nennen

$$E(A,\lambda) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \text{ ist Eigenvektor von } A \text{ zum Eigenwert } \lambda\} \cup \{0\}$$

den *Eigenraum von A zum Eigenwert* λ.. Die Menge $\operatorname{spec} A$ aller Eigenwerte von A nennt man auch das *Spektrum* von A.

2.8 Satz (Struktur von Eigenräumen)**.** Ein Eigenraum $E(A,\lambda)$ ist ein *Unterraum*, d.h. es gilt: Für alle $v, w \in E(A,\lambda)$ und $c \in \mathbb{R}$ sind sowohl $v + w \in E(A,\lambda)$ als auch $cv \in E(A,\lambda)$.

2.9 Definition (Charakteristisches Polynom)**.** Das *charakteristische Polynom einer Matrix* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist

$$\chi_A(X) := \det(XE - A).$$

2.10 Satz (Eigenwerte und charakteristisches Polynom)**.** Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann ist $\lambda \in \mathbb{R}$ genau dann ein Eigenwert von A, falls λ eine Nullstelle von χ_A ist.

Beweis. Nach Definition ist λ genau dann ein Eigenwert von A, wenn es einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$ gibt, sodass $Av = \lambda v$. Nun gilt aber

$$Av = \lambda v \iff Av - \lambda v = 0 \iff (A - \lambda E)v = 0 \iff \det(A - \lambda E) = 0.$$

Der letzter Schritt bedarf vielleicht zusätzlicher Erklärung: Nach Voraussetzung ist ja $v \neq 0$. Wenn also $(A - \lambda E)v = 0$ ist, so kann nach Lemma 1.14 die Matrix $A - \lambda E$ nicht invertierbar sein. Das ist nach Satz 1.10 äquivalent zu $\det(A - \lambda E) = 0$. Ist umgekehrt $\det(A - \lambda E) = 0$, so ist wie gesagt $A - \lambda E$ nicht invertierbar. Daher gibt es gemäß Lemma 1.14 ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$, sodass $(A - \lambda E)v = 0$. Also ist $v \in E(A,\lambda)$ und insbesondere $\lambda \in \operatorname{spec} A$. □

2.11 Satz (Notwendiges Kriterium für Diagonalisierbarkeit)**.** Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisierbar. Dann zerfällt χ_A vollständig in Linearfaktoren.

Beweis. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisierbar. Dann gibt es also eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(n)$, sodass $S^{-1}AS = D$. Daher gilt also unter Benutzung von Satz 1.10:

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \det(XE - A) = \det(XE - SDS^{-1}) = \det(XSS^{-1} - SDS^{-1}) \\
&= \det(S(XE - D)S^{-1}) = \det(S)\det(XE - D)\det(S^{-1}) \\
&= \det(S)\det(S)^{-1}\det(XE - D) = \prod_{i=1}^{n}(X - d_{ii}).
\end{aligned}$$

□

2.12 Satz (Hinreichendes Kriterium für Diagonalisierbarkeit)**.** Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und es bestehe $\operatorname{spec} A$ aus n paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Dann ist A diagonalisierbar. Sind $v_1, \ldots, v_n$ Eigenvektoren zu $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, dann erfüllt die Matrix $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben durch das Spaltensysten

$$S = \begin{pmatrix} v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix}$$

die Gleichung

$$S^{-1}AS = D,$$

wobei D die Diagonalmatrix ist, deren Diagonale gegeben ist durch $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} AS &= A \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av_1 & \dots & Av_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 & \dots & \lambda_n v_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_1 \end{pmatrix} D = SD. \end{aligned}$$

Wenn wir jetzt noch zeigen, dass S invertierbar ist, sind wir fertig. Denn dann ist obige Gleichung äquivalent zu $S^{-1}AS = D$. Gemäß Satz 1.13 zeigen wir dazu, dass Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ linear unabhängig sind. Diese Aussage wiederum beweisen wir ganz profan per Induktion nach n:

Schritt 1 ($n = 1$): Die Gleichung

$$c_1 v_1 = 0$$

impliziert sicherlich $c_1 = 0$, da nach Voraussetzung $v_1 \neq 0$ (denn v_1 ist ja ein Eigenvektor).

Schritt 2 ($n \to n+1$): Es sei die Aussage für n schon gezeigt und es gelte

$$\sum_{i=1}^{n+1} c_i v_i = 0. \tag{2.1}$$

Wendet man nun die Matrix $\lambda_{n+1}E - A$ auf diese Gleichung an, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n} c_i(\lambda_{n+1}E - A)v_i + c_{n+1}(\lambda_{n+1}E - A)v_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i(\lambda_{n+1}v_i - \lambda_i v_i) + c_{n+1}(\lambda_{n+1}v_{n+1} - Av_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i(\lambda_{n+1} - \lambda_i)v_i. \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung folgt daher, dass für alle $1 \leq i \leq n$ gilt:

$$c_i(\lambda_{n+1} - \lambda_i) = 0.$$

Daher sind alle diese $c_i = 0$, denn da ja $1 \leq i \leq n$, ist $\lambda_i \neq \lambda_{n+1}$ nach Voraussetzung. Setzt man dies jetzt wieder in die ursprüngliche Gleichung (2.1) ein, so erhält man

$$0 = \sum_{i=1}^{n+1} c_i v_i = c_{n+1} v_{n+1}.$$

Daraus folgt nun aber auch $c_{n+1} = 0$, da nach Voraussetzung $v_{n+1} \neq 0$.

□

3 Anwendungen

"Warum so ernst, Sohn. Zaubern wir ein Lächeln auf dieses Gesicht."
Joker, Psychopath

3.1 Matrixpotenzen

3.1 Satz (Matrixpotenzen)**.** Sei A diagonalisierbar, es gebe also ein $S \in \mathrm{GL}(n)$ sodass $S^{-1}AS =: D$ diagonal ist. Dann ist

$$A^n = SD^nS^{-1}.$$

Beweis. Es ist

$$S^{-1}AS = D \Longleftrightarrow A = SDS^{-1}$$

und daher

$$A^n = (SDS^{-1})^n = \underbrace{SDS^{-1}SDS^{-1}\dots SDS^{-1}SDS^{-1}}_{n\text{-mal}} = SD^nS^{-1}.$$

□

3.2 Differentialgleichungen

3.2 Definition (lineare Differentialgleichung)**.** Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann heißt

$$y' = Ay$$

lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung. Unter einer *Lösung* eines solchen Systems verstehen wir eine stetig differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, mit

$$\forall t \in I : y'(t) = Ay(t).$$

Man nennt y auch eine *Lösungskurve.*

3.3 Satz. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisierbar und $S \in \mathrm{GL}(n)$ mit $S^{-1}AS = D$ diagonal. Dann ist die Kurve $y := Sz$, wobei

$$\forall 1 \leq i \leq n : z_i(t) := \exp(\lambda_i t). \tag{3.1}$$

eine Lösung von $y' = Ay$.

Beweis. Für eine Diagonalmatrix D mit Diagonale $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ kann man die Lösung von $z' = Dz$ direkt hinschreiben: Sie ist gegeben durch (3.1).

Eine Lösung von $y' = Ay$ erhält man jetzt wie folgt: Weil A diagonalisierbar ist, können wir äquivalent auch das System $y' = SDS^{-1}y$ lösen. Weil S invertierbar ist, ist dies wiederum äquivalent zu $S^{-1}y' = DS^{-1}y$. Wir nennen jetzt $z := S^{-1}y$ und erhalten das Syste, $z' = Dz$. Dessen Lösungen kennen wir aber jetzt aus (3.1). Daher ist die Lösung von $y' = Ay$ gegeben durch $y = Sz$. □

3.4 Definition. Eine *lineare Differentialgleichung der Ordnung* n ist eine Gleichung der Form

$$\sum_{i=0}^{n} c_i y^{(i)} = 0. \tag{3.2}$$

Unter einer *Lösung* versteht man eine n-mal stetig differenzierbare Abbildung $y : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, ein Intervall, die (3.2) erfüllt.

3.5 Lemma. Sei

$$\sum_{i=0}^{n} c_i y^{(i)} = 0. \tag{3.3}$$

eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung. Definiere die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E_{n-1} \\ c_1 & \cdots \ c_n \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Wir sagen dann, dass die Matrix A zu der Gleichung (3.3) assoziiert ist. Dann gilt: Ist A diagonalisierbar und γ die in eine Lösung des DGL-Systems $y' = Ay$ aus Satz 3.3, so ist $\varphi := \gamma_1$ eine Lösung von (3.3).

Beweis. Sei γ die Lösung von $y' = Ay$ aus Satz 3.3. Schreibt man diese Gleichung in Komponenten hin, so erhält man

$$\begin{aligned} \gamma_1' &= y_2 \\ \gamma_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ \gamma_n' &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i \gamma_i \end{aligned}$$

Also erfüllt $\varphi := \gamma_1$ die Differentialgleichung (3.3). □

3.3 Rekursiv definierte Zahlenfolgen

3.6 Satz. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und es gebe $a, b \in \mathbb{R}$, sodass

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} = a x_n + b x_{n-1}.$$

Die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt dann

$$\forall n \in \mathbb{N} : \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ist A diagonalisierbar mit $S^{-1}AS = D$, dann gilt

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = SD^n S^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Dies zeigen wir per Induktion nach n: Für $n = 1$ gilt

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a x_1 + b x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = SDS^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

Für den Induktionsschluss $n \to n+1$ betrachten wir

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = ASD^n S^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = SDS^{-1}SD^n S^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = SD^{n+1} S^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

□

Als Anwendung der Anwendung leiten wir eine berühmte Formel für die Fibonacci-Folge her.

3.7 Definition (Fibonacci Folge)**.** Die Zahlenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche rekursiv definiert ist durch

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \qquad f_0 := 0, \qquad f_1 := 1 \tag{3.5}$$

heißt *Fibonacci-Folge*.

3.8 Satz (Formel von Moivre-Binet)**.** Für alle $n \neq 2$ gilt:

$$f_n = \frac{\lambda_+^n - \lambda_-^n}{\sqrt{5}}, \qquad \lambda_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \tag{3.6}$$

Die Zahl λ_+ heißt *goldener Schnitt*.
Man beachte übrigens, dass aus der rekursiven Definition der Fibonacci-Folge folgt, dass $f_n \in \mathbb{N}$, was aus dem expliziten Ausdruck (3.6) gar nicht so ersichtlich ist.

Beweis.
Schritt 1 (Reduktion auf Matrixproblem): Wir machen uns zunächst einmal klar, dass aus der Definition (3.5) der Fibonacci-Folge folgt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

Dadurch erhalten wir eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.
Schritt 2 (Diagonalisierung von A): Wir wollen jetzt die Matrix A diagonalisieren. Dazu bestimmen wir zunächst $\operatorname{spec} A$, sprich die Eigenwerte. Gemäß Satz 2.10 müssen wir dazu die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Dieses lautet

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(XE - A) = \det\left(\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} X-1 & -1 \\ -1 & X \end{pmatrix} = (X-1)X - 1 = X^2 - X - 1 \end{aligned}$$

Die Nullstellen dieser quadratischen Gleichung bestimmt man gemäß der p-q-Formel und erhält:

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Die Matrix A hat also genau die zwei verschiedenen Eigenwerte λ_+ und λ_-. Gemäß Satz 2.12 ist A also diagonalisierbar und es gibt eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(n)$, sodass $S^{-1}AS = D$, wobei

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}, \qquad S = (v^+, v^-), \qquad v^+ \in E(A, \lambda_+),\ v^- \in E(A, \lambda_-).$$

Wir müssen also ganz konkret Eigenvektoren $v^+, v_- \in \mathbb{R}^2$ bestimmen. Per Definition sind diese Vektoren Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$Av^\pm = \lambda_\pm v^\pm$$

Dies ganz man auch noch etwas konkreter hinschreiben:

$$\begin{pmatrix} \lambda_\pm v_1^\pm \\ \lambda_\pm v_2^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^\pm \\ v_2^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^\pm + v_2^\pm \\ v_1^\pm \end{pmatrix}.$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten $v_1^\pm$ und $v_2^\pm$, das man jetzt nach einem beliebigen Verfahren lösen kann. Man bekommt als Ergebnis die Lösungsmenge

$$E(A, \lambda_\pm) = \{cv_\pm \mid c \in \mathbb{R}\}, \qquad v_\pm =, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\pm\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix S ist also gegeben druch

$$S = (v_+, v_-) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} & \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix}$$

Wir erhalten gemäß (1.1)

$$\det(S) = \frac{-\sqrt{5}-1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{-\sqrt{5}-1-\sqrt{5}+1}{2} = -\sqrt{5}.$$

und daher unter Benutzung von Satz 1.11

$$S^{-1} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{5}-1}{2} & -1 \\ \frac{-\sqrt{5}+1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 3 (Eintüten): Damit haben wir jetzt alles beisammen, um das Problem zu lösen. Denn gemäß Satz 3.6 gilt jetzt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} &= SD^nS^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{5}} SD^n \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{5}-1}{2} & -1 \\ \frac{-\sqrt{5}+1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{5}} S \begin{pmatrix} \lambda_+^n & 0 \\ 0 & \lambda_-^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \\ \frac{-\sqrt{5}+1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} & \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_+^n \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \\ \lambda_-^n \frac{-\sqrt{5}+1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wir multiplizieren den letzten Ausdruck aus, aber nur die zweite Zeile. Dann folgt nämlich insgesamt (unter Benutzung der Definition von $\lambda_\pm$):

$$\begin{aligned}
f_n &= \frac{\lambda_-\lambda_+\lambda_+^n - \lambda_+\lambda_-^n\lambda_-}{-\sqrt{5}} = \frac{(\lambda_+^n - \lambda_-^n)\lambda_-\lambda_+}{-\sqrt{5}} \\
&= \frac{(\lambda_+^n - \lambda_-^n)\frac{(1+\sqrt{5})(1-(-\sqrt{5}))}{4}}{-\sqrt{5}} = \frac{\lambda_+^n - \lambda_-^n}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$\square$

Index