Totale Differenzierbarkeit

A: Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$(x_1,x_2)\mapsto\begin{cases}\dfrac{x_1x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} & \text{,falls } (x_1,x_2)\neq 0\\ 0 & \text{,sonst}\end{cases}$$

Prüfe, ob f bei $a:=(0,0)$ partiell differenzierbar ist und berechne ggf. die partiellen Ableitungen. Ist f bei a total differenzierbar?

Lösung: Es ist für alle $x_1,x_2\in\mathbb{R}$

$$f(x_1,0)=0 \text{ und } f(0,x_2)=0$$

also ist

$$\partial_1 f(0)=0\text{, } \partial_2 f(0)=0$$

Jedoch ist f nicht total differenzierbar, denn sonst wäre $f'(0)=(0,0)$ und es müsste gelten:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)-f'(0)h}{\|h\|}=\lim_{h\to0}\frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}=0$$

für speziell eine Folge $h_1=h_2$ gilt jedoch:

$$\lim_{h\to0}\frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}=\lim_{h\to0}\frac{h_1^2}{2h_1^2}=\frac{1}{2}\neq0$$

A a): Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$(x_1,x_2)\mapsto\begin{cases}\dfrac{x_1x_2^3}{x_1^2+x_2^4} & \text{,falls } (x_1,x_2)\neq 0\\ 0 & \text{,sonst}\end{cases}$$

Lösung:
$f(x_1,0)=0$, $f(0,x_2)=0$ also partiell diffbar mit $(0,0)$ als Kandidat für $f'(0,0)$
Aber nicht total diffbar, da für $\sqrt{h_1}=h_2$:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)-f'(0)h}{\|h\|}=\lim_{h\to0}\frac{h_1h_2^3}{\left(h_1^2+h_2^4\right)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{h\to0}\frac{h_1\sqrt{h_1}^3}{2h_1^2\sqrt{h_1^2+h_1}}=\lim_{h\to0}\frac{h_1h_1^{3/2}}{2h_1^2\sqrt{h_1}\sqrt{h_1+1}}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h_1^{5/2}}{2h_1^{5/2}\sqrt{h_1+1}}=\frac{1}{2}\neq0$$

A b): Sei $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(x_1,x_2) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x_1^3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} & \text{,falls } (x_1,x_2) \neq 0 \\ 0 & \text{,sonst} \end{cases}$$

Zeige, dass f überall differenzierbar ist. [KII, 2.8, 2]

Beweis: Wir behaupten, dass $f'(0)=0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)-f'(0)h}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|} \frac{h_1^3}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{h_1^3}{h_1^2+h_2^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h_1^3}{h_1^2\left(1+\frac{h_2^2}{h_1^2}\right)} = \lim_{h\to 0} h_1 \frac{1}{1+\frac{h_2^2}{h_1^2}} = 0$$

A c): Sei $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(x_1,x_2) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x_1^3}{x_1^2+x_2^2} & \text{,falls } (x_1,x_2) \neq 0 \\ 0 & \text{,sonst} \end{cases}$$

Lösung: Ist partiell diffbar:
$f(x_1,0)=x_1$, $f(0,x_2)=0$ also $\partial_1 f(0,0)=1$, $\partial_2 f(0,0)=0$.
Aber nicht total, denn für $h_1=h_2$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)-f'(0)h}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{h_1^3}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{(h_1^2+h_2^2)}} - \frac{h_1}{\sqrt{(h_1^2+h_2^2)}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h_1^3}{2h_1^2\sqrt{2}h_1} - \frac{h_1}{\sqrt{2}h_1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

A d) $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ partiell mit $(0,0)$, aber nicht total:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)-f'(0)h}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|h_1h_2|}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{h_1}{\sqrt{2}h_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Implizite Funktionen

A: i) Man zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{vmatrix} x^2+uy+e^v=0 \\ 2x+u^2-uv=5 \end{vmatrix}$$

in einer Umgebung des Punkte $(2,5)$ durch eine C^1-Abbildung $g=(u,v):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$$(x,y)\mapsto\big(u(x,y),v(x,y)\big)$$

mit $u(2,5)=-1$ und $v(2,5)=0$ aufgelöst werden kann.

ii) Man berechne $g'(2,5)$.

[K2, 3.7, 7]

Lösung: Wir definieren die Funktion $F:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$

$$(x,y,u,v)\mapsto\begin{pmatrix} x^2+uy+e^v \\ 2x+u^2-uv-5 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$F(2,5,-1,0)=\begin{pmatrix} 2^2-1\cdot5+e^0 \\ 2\cdot2+(-1)^2+1\cdot0-5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Außerdem ist

$$\nabla_{(u,v)}F(2,5,-1,0)=\begin{pmatrix} y & e^v \\ 2u-v & -u \end{pmatrix}(2,5,-1,0)=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\det\Big(\nabla_{(u,v)}F(2,5,-1,0)\Big)=5+2=7\neq0$$

Also existiert nach dem Satz über implizite Funktionen eine Umgebung V von $(2,5)$ und W von $(-1,0)$ sowie eine C^1-Abbildung $g:V\to W$ mit den gewünschten Eigenschaften.

ii) Es ist:

$$g'(2,5)=-\nabla_{(u,v)}F\big(2,5,g(2,5)\big)^{-1}\cdot\nabla_{(x,y)}F\big(2,5,g(2,5)\big)$$

Wie oben ermittelt, ist $g(2,5)=(-1,0)$. Außerdem ist

$$\nabla_{(x,y)}F(2,5,-1,0)=\begin{pmatrix} 2x & u \\ 2 & 0 \end{pmatrix}(2,5,-1,0)=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ferner ist

$$\nabla_{(u,v)}F(2,5,-1,0)^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Also insgesamt:

$$g'(2,5)=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 18 & -2 \end{pmatrix}$$

A: Betrachte für $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ die Gleichung

$$z^3+z+xy=1 \quad (*)$$

i) Zeige, dass es für jedes $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ genau ein $g(x,y):=z\in\mathbb{R}$ gibt, sodass $(*)$ gilt.

ii) Zeige, dass die so definierte Funktion $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

iii) Berechne $g'(1,1)$.

iv) Wo hat g kritische Punkte?

[K2, 3.7, 6]

Lösung: Definiere die Funktion $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $F(x,y,z):=z^3+z+xy-1$

i) Für festes x,y ist $F(x,y,\_)$ ein Polynom vom Grad 3 und somit gilt

$$\lim_{z\to\pm\infty} F(x,y,z)=\pm\infty$$

nach dem Zwischenwertsatz besitzt $F(x,y,\_)$ also eine Nullstelle. Da ferner

$$\partial_z F(x,y,z)=3z^2+1>0$$

ist $F(x,y,\_)$ streng monoton steigend. Daher ist die Nullstelle auch eindeutig.

ii) Wir haben in i) schon gezeigt, dass für beliebiges (x,y) stets gilt $\partial_z F(x,y,z)\neq 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert also eine Umgebung V von (x,y) und eine Umgebung W von $g(x,y)$ und eine differenzierbare Funktion $h:V\to W$, sodass

$$\forall z\in W: F(x,y,z)=0 \Leftrightarrow z=h(x,y)$$

Wegen der Eindeutigkeit der Nullstellen muss notwendig gelten $h=g|_V$. Also muss auch g differenzierbar sein, da h nach dem Satz über implizite Funktionen differenzierbar ist.

iii) Wir bestimmen zunächst $g(1,1)$:

$$0=F(1,1,z)=z^3+z+1-1=z^3+z=z(z^2+1)\Leftrightarrow z=0$$

also ist $g(1,1)=0$. Außerdem ist

$$\partial_x F=y, \partial_y F=x$$

und damit

$$g'(1,1)=-\partial_z F(1,1,g(1,1))^{-1}\cdot(\partial_x F,\partial_y F)(1,1,g(1,1))=-\frac{1}{3\cdot 0^2+1}\cdot(1,1)=(-1,-1)$$

iv) Allgemein ist

$$g'(x,y)=-\partial_z F(x,y,g(x,y))^{-1}\cdot(\partial_x F,\partial_y F)(x,y,g(x,y))=(0,0)$$
$$\Leftrightarrow (0,0)=(\partial_x F,\partial_y F)(x,y,g(x,y))=(y,x)$$

Also ist $\nabla g(x,y)=0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$.

Umkehrsatz

A: Sei $\Omega :=]1,2[\times]0,3\pi[$, $f:\Omega\to\mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto(y\sin(x),y\cos(x))$. Man zeige, dass f lokaler $\Omega\to f(\Omega)$ ist.

Lösung:
Es ist

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix} y\cos(x) & \sin(x) \\ -y\sin(x) & \cos(x)\end{pmatrix}$$

Also

$$\det(\nabla f(x,y)) = y\cos(x)^2 + y\sin(x)^2 = y\neq 0$$

Also ist nach dem Umkehrsatz f in jedem Punkt $(x,y)\in\Omega$ lokaler Diffeomorphismus.

(1) Untersuche die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf partielle und totale Differenzierbarkeit im Punkt $(0,0)$.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^4}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} x, & \text{falls } |x| \geq |y|, \\ y, & \text{falls } |x| < |y| \end{cases}$

(2) (a) Bestimme alle Punkte, in denen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix},$$

lokal umkehrbar ist.

(b) Zeige, dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ \mathrm{e}^{x+y} \end{pmatrix},$$

in $(1,0)$ lokal umkehrbar ist. Berechne den Gradienten der lokalen Umkehrfunktion im Punkt $(0,\mathrm{e}) = f(1,0)$.

(c) Zeige, dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} y + \mathrm{e}^x \\ x - \mathrm{e}^y \end{pmatrix},$$

in jedem Punkt lokal umkehrbar ist. Berechne den Gradienten der lokalen Umkehrfunktion im Punkt $(1,-1)$.

(d) Bestimme eine Gerade $G \subseteq \mathbb{R}^2$, sodass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + 3xy + 2y^2 \\ xy + 2y^2 \end{pmatrix},$$

auf $\mathbb{R}^2 \setminus G$ lokal umkehrbar ist.

(e) Bestimme alle Punkte, in denen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\cos y \\ x\sin y \\ z \end{pmatrix},$$

lokal umkehrbar ist.

(3) Untersuche, ob es sich bei der Menge um eine Untermannigfaltigkeit handelt.

(a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = \cos x\} \subseteq \mathbb{R}^3$

(b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+y+z)^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 = y^3\} \subseteq \mathbb{R}^2$

(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$

(e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) = y\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ mit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$

(4) Untersuche die Funktion f auf lokale Minima und Maxima auf M.

(a) $f(x,y) = 2xy, \quad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$

(b) $f(x,y) = x^2 - y^2, \quad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$

(c) $f(x,y) = 4x^2 - 3xy, \quad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 10\}$

(d) $f(x,y,z) = 4x - y + z, \quad M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 5,\ 3(y-x) = z\}$

(e) $f(x,y) = y, \quad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^3\}$

(5) Löse das Anfangswertproblem mittels Trennung der Veränderlichen.

(a) $y'(x)y(x) = \mathrm{e}^x, \quad y(0) = 2$

(b) $y'(x)y(x) = -x, \quad y(1) = 1$

(c) $y'(x) = 2\mathrm{e}^{-y(x)}(x+1), \quad y(0) = 1$

(d) $xy'(x) = (1-2x)y(x), \quad y(1) = 1$

(e) $y'(x) = y^2(x) - y(x), \quad y(\log 2) = -1$

(6) Bestimme alle Lösungen der linearen Differenzialgleichung.

(a) $2y''(x) + y'(x) - y(x) = 2\mathrm{e}^x$

(b) $y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 9x + 3$

(c) $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 10\sin x$

(d) $y^{(3)}(x) - 4y''(x) + 5y'(x) = 0$

(e) $y^{(4)}(x) + 2y''(x) + y(x) = 25\mathrm{e}^{2x}$

(7) Bestimme alle Lösungen der linearen Differenzialgleichung $y'(x) = Ay(x)$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(8) Zeige, dass es sich bei den angebenen Punkten um Attraktoren des Systems handelt.

(a) $\begin{aligned} y_1' &= 1 - y_1^2 y_2, \\ y_2' &= y_1^2 - y_2^2 \end{aligned}$ Attraktor: $(1, 1)$

(b) $\begin{aligned} y_1' &= y_2 - y_1 - 1, \\ y_2' &= \mathrm{e}^{y_1^2} - y_2 \end{aligned}$ Attraktor: $(0, 1)$

(c) $\begin{aligned} y_1' &= y_1(3 - y_1 - 2y_2), \\ y_2' &= y_2(2 - y_1 - y_2) \end{aligned}$ Attraktoren: $(0, 2)$, $(3, 0)$