

Repetitorium Analysis I

WS07/08 Uni Bonn

Repetitorium Analysis I	1
1 Taylor-Reihen	1
2 Satz von de l'Hospital	5
3 Unendliche Reihen und Potenzreihen	7
4 Xi-Finder und ihre Anwendungen	11
5 Sonstiges	13

Dies ist ein Script zum Repetitorium Analysis I, gehalten im Wintersemester 07/08 an der Uni Bonn von Nikolai Nowaczyk, Moritz Firsching und Anton Stephan. Jedes Repetitorium bestand aus fünf zweistündigen Übungen, die sich inhaltlich an der Vorlesung von Helmut Abels und den Übungen von Matthias Kurzke orientierten. Da bei den am Ende der Vorlesung behandelten Themen am meisten Gesprächsbedarf war, haben wir die sonst übliche Reihenfolge der Themen umgekehrt. In jeder Stunde wurden meist am Anfang kurz einige wichtige Sätze und Definitionen wiederholt und dann dazu Anwesenheitsaufgaben gerechnet. Beides ist hier abgedruckt. Aufgrund der Kürze der Zeit ist dieses Repetitorium natürlich alles andere als vollständig. Da wir viel auf Fragen eingegangen sind, kann es auch durchaus sein, dass dieses Script nicht hundertprozentig auf alle Repetitorien passt.

Die Aufgaben wurden sorgfältig ausgewählt und überprüft, wir übernehmen aber keine Garantie für die Korrektheit der Lösungen. Sollte jemand einen Fehler finden, so möge er sich bitte melden

Subject: Bugreport RepAna1, To: nikno@uni-bonn.de

1 Taylor-Reihen

Def. (Differenzierbarkeit): Sei $D \subset \mathbb{R}$, $a \in D$ Häufungspunkt von D und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt f *differenzierbar bei a* , falls der Limes

$$f'(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. Die Zahl $f'(a)$ heißt *Ableitung von f bei a* . Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar*, falls sie in jedem Punkt $a \in D$ differenzierbar ist. Die Funktion $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Ableitung*. Die Menge aller n -mal stetig auf D differenzierbaren Funktionen notieren wir mit $C^n(D)$. Die Menge der beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf D notieren wir mit $C^\infty(D)$.

Satz (Zerlegungssatz): Sei $D \subset \mathbb{R}$, $a \in D$ Häufungspunkt von D und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt: f ist genau dann in a differenzierbar, falls gilt: Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$ und eine in a stetige Funktion $r : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $r(a) = 0$, sodass

$$\forall x \in D: f(x) = f(a) + c \cdot (x - a) + r(x)(x - a)$$

Falls f bei a differenzierbar ist, so gilt $c = f'(a)$.

A1.1: Beweise folgendes

Lemma: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal in $a \in D$ differenzierbar. Dann existiert genau eine Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Form

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i (x-a)^i \text{ mit } \forall 0 \leq k \leq n: p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$$

Lösung (Beweis): Da ein Polynom durch seine Koeffizienten a_k bereits eindeutig bestimmt ist, versuchen wir zunächst diese zu ermitteln.

Eindeutigkeit: Für beliebiges $0 \leq k \leq n$ gilt:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(a) &= p^{(k)}(a) = \left(\sum_{i=0}^n a_i (x-a)^i \right)^{(k)}(a) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{k-1} a_i (x-a)^i \right)^{(k)}(a) + \left(a_k (x-a)^k \right)^{(k)}(a) + \left(\sum_{i=k+1}^n a_i (x-a)^i \right)^{(k)}(a) \\ &= 0(a) + k! a_k (a-a)^0 + \sum_{i=k+1}^n \frac{i!}{(i-k)!} a_i (a-a)^{i-k} = k! a_k \end{aligned}$$

Für jeden Koeffizienten gilt also

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

Existenz: Da die Funktion gegeben ist, hindert uns nichts daran das Polynom p zu definieren durch

$$p(x) := \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i$$

Damit ist obiges Problem also gelöst.

Def. (Taylorpolynom): Sei $f \in C^n(D)$ dann heißt obiges Polynom *Taylorpolynom von f am Entwicklungspunkt a* und wird geschrieben mit $T_n[f; a]$. Man bezeichnet $R_{n+1} : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$R_{n+1} := f - T_n[f; a]$$

als das zugehörige *Restglied*. Falls $f \in C^\infty(D)$, so heißt die Reihe

$$T[f; a](x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

Taylorreihe von f in a .

Man beachte, dass wir auch für jede andere Funktion $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ ein „Restglied“ $f - h$ definieren könnten (man nennt es auch Differenz). Das Bemerkenswerte ist nicht, dass es ein Restglied gibt, sondern dass es unter gewissen Voraussetzungen eine interessante Form hat:

Satz von Taylor: Sei $f : [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal stetig differenzierbar und auf $]a, x[$ existiere auch die $(n+1)$ -te Ableitung. Dann gilt: Es existiert ein $\xi \in]a, x[$, sodass

$$f(x) = T_n[f; a](x) + R_{n+1}(x),$$

wobei

$$T_n[f, a](x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad \text{und} \quad R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

Bemerkung 1: Wendet man den Satz von Taylor an, so erfüllt die Funktion f häufig viel stärkere Voraussetzungen. Häufig ist z.B. $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $a \in I$. Dann darf man für jedes $x \in I$ obigen Satz anwenden, weil dann $[a, x] \subset I$ bzw. $[x, a] \subset I$. Man darf dabei aber nicht vergessen, dass das ξ im Restglied von der Auswertungsstelle x abhängt. Manche Lehrbuchautoren kennzeichnen dies daher sicherheitshalber, indem sie statt ξ schreiben $\xi(x)$. Für zwei Punkte

$x, y \in I$ mit $x \neq y$ ist im Allgemeinen $\xi(x) \neq \xi(y)$. Auch wenn man den Entwicklungspunkt a durch einen anderen Punkt $b \in I$ ersetzt, erhält man im Allgemeinen ein anderes Restglied ξ .

Bemerkung 2: In obiger Formulierung ist a der Entwicklungspunkt des Taylorpolynoms und x die Stelle, an der wir die Funktion auswerten, d.h. es gilt insgesamt

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

Die Wahl der Bezeichner a für die Entwicklungsstelle und x für die Auswertungsstelle ist weit verbreitet. Genauso weit verbreitet ist aber auch eine andere Formulierung:

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

Hier heißt der Entwicklungspunkt x und die Stelle, an der wir auswerten, $a := x+h$. Die beiden Formulierungen sind völlig äquivalent.

Bemerkung 3: Der Satz von Taylor ist ein qualitativer Satz, d.h. er liefert eine Existenzaussage. „Es existiert ein ξ , sodass...“. Der Satz von Taylor sagt nicht, dass wir das Restglied einfach weglassen dürfen. Es sagt nicht, dass falls $f \in C^\infty(D)$ die zugehörige Taylorreihe konvergieren muss. Er sagt nicht, dass falls die Taylorreihe konvergiert, diese auch gegen die Funktion konvergieren muss. Das liegt daran, dass alle diese Aussagen im Allgemeinen falsch sind.

A1.2: Berechne für $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$ das Taylorpolynom $T_3[f; 2](x)$ und das Restglied $R_4(x)$.

Lösung: Wir bestimmen zunächst die Ableitungen:

$$f^{(0)}(2) := f(2) = 8 + 2 \cdot 4 + 2 - 1 = 17$$

$$f^{(1)}(2) := f'(2) = (3x^2 + 4x + 1)(2) = 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1 = 21$$

$$f^{(2)}(2) = (6x + 4)(2) = 6 \cdot 2 + 4 = 16$$

$$f^{(3)}(2) = 6$$

$$\text{Also ist: } T_3[f; 2](x) = 17 + 21 \cdot (x-2) + 8 \cdot (x-2)^2 + (x-2)^3$$

Da $f^{(4)}(x) = 0$, gilt nach dem Satz von Taylor für das Restglied $R_4(x) = 0$ und somit $T_3[f; 2](x) = f(x)$. (Man kann dies auch ohne den Satz von Taylor verifizieren, indem man mit Hilfe des Binomischen Satzes die Klammern in $T_3[f, 2]$ auflöst und vereinfacht.)

A1.3: Berechne für $f:]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ die Taylorreihe $T[f; a]$ in $a = 0$. Für welche x gilt

$$T[f; 0](x) = f(x)?$$

Lösung:

$$f'(x) = \left((1-x)^{-1} \right)' = (-1)(1-x)^{-2} \cdot (-1) = (-1)^2 (1-x)^{-2}$$

$$f''(x) = (-1)^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (1-x)^{-3}$$

...

$$f^{(k)}(x) = k! (1-x)^{-k-1}$$

Somit liefert die Taylorreihe

$$T[f; a](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!(1-0)^{-k-1}}{k!} x^k \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} = f(x)$$

(1): geometrische Reihe

A1.4: Sei $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \ln(x)$, $a := 1$. Berechne die Taylorreihe $T[f, a](x)$.

Beweis: Wir betrachten die ersten Ableitungen von f :

$$f(1) = \ln(1) = 0$$

$$f'(x) = \ln'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$$

$$f''(x) = (x^{-1})' = -x^{-2} \Rightarrow f''(x) = -1$$

$$f^{(3)}(x) = 2x^{-3} \Rightarrow f^{(3)}(1) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -2 \cdot 3 \cdot x^{-4} \Rightarrow f^{(4)}(1) = -2 \cdot 3$$

...

$$\Rightarrow f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} (k-1)!$$

Also:

$$T[\ln, 1](x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{k \cdot (k-1)!} (x-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k$$

Bemerkung: Falls wir jetzt wüssten, dass $T[f, 1](x) = \ln(x)$ für alle $|x| < 1$ (Beweis nächstes Semester), so würden wir erhalten:

$$\ln(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \quad \text{„Logarithmusreihe“}$$

Anwendung: Der Grenzwert der alternierenden harmonischen Reihe ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} 1^k = -\ln(2)$$

A1.5: Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, zwei Mal stetig differenzierbar. Es sei $x \in]a, b[$ und $h \in \mathbb{R}_{>0}$ so gewählt, dass $B_h(x) \subset]a, b[$. Dann heißt

$$(D_h^+(f))(x) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (D_h^-(f))(x) := \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Vorwärts- bzw. Rückwärtsdifferenz von f bei x um h . Zeige

$$(D_h^-(D_h^+(f)))(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Zeige weiter mit Hilfe des Satzes von Taylor, dass:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$$

Beweis:

$$\left(D_h^-(D_h^+(f))(x)\right) = D_h^-\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) = \frac{f(x+h)-f(x)-f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

Nach dem Satz von Taylor gilt:

$$\exists \xi_+ \in]x, x+h[: f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(\xi_+) \frac{h^2}{2}$$

$$\exists \xi_- \in]x-h, x[: f(x-h) = f(x) - f'(x)h + f''(\xi_-) \frac{h^2}{2}$$

Also:

$$f(x+h) + f(x-h) - 2 \cdot f(x) = f''(\xi_+) \frac{h^2}{2} + f''(\xi_-) \frac{h^2}{2} \text{ und somit}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(D_h^-(D_h^+(f))(x)\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(\xi_+) + f''(\xi_-)}{2} = f''(x)$$

Denn aus $h \rightarrow 0$ folgt $\xi_+ \rightarrow x$ und $\xi_- \rightarrow x$. Da f'' stetig ist, folgt $f''(\xi_+) \rightarrow f''(x)$ und $f''(\xi_-) \rightarrow f''(x)$.

2 Satz von de l'Hospital

Beim Bestimmen von Grenzwerten haben wir oft das Problem, dass wir die Grenzwertsätze nicht direkt anwenden können, weil wir einen Ausdruck der Form

$$\text{„} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{0}{0} \text{“ oder „} = \frac{\infty}{\infty} \text{“}$$

vorliegen haben. Zähler und Nenner konvergieren entweder beide gegen Null oder divergieren beide bestimmt gegen ∞ . Da $0/0$ nicht definiert und ∞ keine reelle Zahl ist, darf man die Grenzwertsätze hier nicht anwenden. Eine Lösung für dieses Dilemma ist der

Satz (von Guillaume François Antoine, Marquis de L'Hospital): Seien $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$ und entweder

$$\text{A) } \lim_{x \searrow a} f(x) = 0, \lim_{x \searrow a} g(x) = 0$$

oder

$$\text{B) } \lim_{x \searrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \searrow a} g(x) = \infty$$

Dann gilt: Existiert $\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch $\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt:

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Analoges gilt für $x \nearrow b$, $x \rightarrow x_0 \in]a, b[$, $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$.

Bemerkung: Meist erfüllen die Funktionen, auf die man diesen Satz anwenden möchte viel stärkere Voraussetzungen. Da der Satz für Grenzübergänge jeglicher Art gilt, findet er viele Anwendungen. Es

ist insbesondere erlaubt ihn mehrfach anzuwenden, d.h. falls auch $f'(x)/g'(x)$ die Voraussetzungen erfüllt, kann man mehrfach „de l'Hospitalen“. Einzige Fehlerquelle ist die Existenzaussage: Falls der Limes $\lim_{x \searrow a} f'(x)/g'(x)$ nicht existiert, so kann man i.A. keine Aussagen über $\lim_{x \searrow a} f(x)/g(x)$ machen.

Folgende Übungsaufgaben sollen den Satz in Aktion demonstrieren:

$$\mathbf{A2.1:} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

$$\mathbf{A2.2:} \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = -\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$\mathbf{A2.3:} \lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} \exp(x \cdot \ln(x)) = \exp(0) = 1$$

$$\mathbf{A2.4:} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(2x) \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(2x) \cdot 2} = 1$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A2.5:} \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{3}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{3}{x^2} \ln(1+x^2)\right) = \exp\left(3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right)\right) \\ &= \exp\left(3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x^2)^{-1} \cdot 2x}{2x}\right)\right) = \exp\left(3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right) = e^3 \end{aligned}$$

A2.6:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{\sin(x)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x) + x \cdot \cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \cos(x) - x \sin(x)} = \frac{0}{1+1-0} = 0 \end{aligned}$$

A2.7: Sind $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ so gilt:

$$\lim_{x \searrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{ab}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \lim_{x \searrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \searrow 0} \exp\left(\frac{\ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)}{x}\right) = \exp\left(\lim_{x \searrow 0} \frac{\ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)}{x}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x \searrow 0} \frac{2}{a^x + b^x} \frac{\ln(a)a^x + \ln(b)b^x}{2}\right) = \exp\left(\lim_{x \searrow 0} \frac{\ln(a)a^x + \ln(b)b^x}{a^x + b^x}\right) \\ &= \exp\left(\frac{\ln(a) + \ln(b)}{2}\right) = \exp\left(\frac{\ln(a)}{2}\right) \exp\left(\frac{\ln(b)}{2}\right) = \sqrt{ab} \end{aligned}$$

3 Unendliche Reihen und Potenzreihen

In diesem Themenblock haben wir wichtige Konvergenzkriterien für unendliche Reihen wiederholt, hauptsächlich Wurzel- und Quotientenkriterium. Hier gab es große Verwirrung, weil diese Kriterien in Vorlesung, Königsberger, Forster oder Formelsammlung behandelt werden und jedes Mal „anders“ aussehen. Um die Verwirrung perfekt zu machen, formulieren wir sie nun nochmals „anders“:

Wurzelkriterium: Sei (a_n) komplexe Folge.

$$(a) \text{ Konvergenzkriterium: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

$$\Rightarrow \exists q \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \Rightarrow |a_n| \leq q^n, q < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

$$(b) \text{ Divergenzkriterium: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

$$\Rightarrow \text{Es gibt eine Teilfolge } (a_{n_k}) \text{ mit } \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geq 1 \Rightarrow |a_{n_k}| \geq 1$$

$$\Rightarrow (a_n) \text{ kann nicht gegen Null gehen}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

Wir haben das so komisch aufgeschrieben, weil jetzt hoffentlich klar wird, wie die unterschiedlichen Formulierungen des Wurzelkriteriums miteinander zusammenhängen: Die obigen beiden Implikationsketten sind nichts anderes als eine Beweisskizze des Wurzelkriteriums. Man darf sich daraus für eine konkret vorgelegte Reihe sein Wunsch-Wurzelkriterium zusammenbauen. Um die Konvergenz einer Reihe zu beweisen, kann man sich Ausschauen ob man

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1, 2) \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \text{ oder } 3) \exists q \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$$

nachrechnen möchte. In allen drei Fällen darf man den Beweis mit „Daraus folgt die Konvergenz von $\sum_n a_n$ nach dem Wurzelkriterium“ schließen. Es sei allerdings darauf hingewiesen, dass in 99% aller Fälle die erste Bedingung $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ mit Abstand am einfachsten nachzurechnen ist, weil man dafür die Grenzwertsätze benutzen darf.

Quotientenkriterium: Sei (a_n) komplexe Folge mit $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

$$(a) \text{ Konvergenzkriterium: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

$$\Rightarrow \exists q \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q < 1 \Rightarrow |a_{n+1}| \leq q^{n-N} |a_N|$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

$$(b) \text{ Divergenzkriterium: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n \neq 0 \text{ und } \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1 \Rightarrow |a_{n+1}| \geq |a_N| > 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergiert.}$$

Auch dieses Kriterium haben wir mit Absicht so aufgeschrieben, dass es hoffentlich alle Formulierungen, die ihr gefunden habt, in Konsistenz zueinander bringt.

Bemerkung 1: Beide Sätze liefern hinreichende Kriterien für absolute Konvergenz. Reihen, denen man von vorne herein ansehen kann, dass sie nicht absolut konvergieren können, sondern wenn überhaupt nur bedingt, sind für diese Kriterien also ungeeignet. Bedingt konvergente Reihen sind oft von der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Hier hilft oft das Leibnitz-Kriterium weiter.

Bemerkung 2: Der im Zusammenhang mit diesen Kriterien mit Abstand am meisten begangene Fehler ist der folgende: Eine Reihe ist vorgelegt, man erhält

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \text{ oder } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$$

und trifft nun Aussagen über das Konvergenzverhalten der zugehörigen Reihe. Warum führt das in die Katastrophe?

A3.1: Berechne zu diesem Zweck

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}$$

für $a_n := \frac{1}{n}$ und $b_n := \frac{1}{n^2}$.

Lösung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} = 1 \cdot 1 = 1$$

Aus Vorlesung und Übungen wissen wir jedoch, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergiert, aber } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konvergiert}$$

Falls bei einer Analyse solcher Grenzwerte also 1 herauskommt, nutzt uns das nichts. Das ist bitter, aber nicht zu ändern. Es existiert keine sinnvolle Verallgemeinerung dieser Kriterien, die dann auch noch eine Aussage zulässt.

Als nächstes kann man sich die Frage stellen, wieso in allen Kriterien überall $\limsup$ steht, nur bei der Divergenz im Wurzelkriteriums nicht. Warum steht dort $\liminf$ und nicht auch $\limsup$?

A3.2: Zeige, dass die Bedingung $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$ nicht hinreichend ist für Divergenz von $\sum a_n$.

Betrachte dazu als Gegenbeispiel die Folge

$$a_n := \begin{cases} 2^{-n}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 3^{-n}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

und berechne

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Konvergiert $\sum_n a_n$?

Lösung: Da die Folge durch eine Fallunterscheidung definiert ist, machen wir auch eine:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \begin{cases} 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{für } n \text{ gerade} \\ 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die obere Folge konvergiert gegen Null, die untere gegen unendlich. Die Quotientenfolge hat also zwei relevante Teilfolgen und es folgt:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0 < 1 \text{ und } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \infty > 1$$

Wenden wir nun das Wurzelkriterium an, so erhalten wir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 2^{-1} & \text{für } n \text{ gerade} \\ 3^{-1} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \leq \frac{1}{2} < 1$$

Hier hat die Wurzelfolge $\sqrt[n]{|a_n|}$ genau zwei Häufungspunkte, nämlich $1/2$ und $1/3$, welche beide kleiner sind als 1. Folglich konvergiert $\sum_n a_n$ absolut. Das hätte man übrigens auch einfacher haben können:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ konvergiert mit geometr. Reihe}$$

Im Quotientenkriterium steht beim Divergenzfall also der $\liminf$, weil der Satz mit $\limsup$ falsch wäre. Denn der würde über obige Folge aussagen, dass sie divergiert.

Nachdem wir jetzt gesehen haben, wo die Kriterien versagen, wollen wir ein paar Aufgaben rechnen, wo sie funktionieren:

A3.3: Entscheide, ob die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ konvergiert oder nicht für

$$1) a_n := \frac{n^a}{n!} \quad a \in \mathbb{Q}, \quad 2) a_n := \frac{2^n n!}{n^n} \quad 3) a_n := \frac{n^4}{3^n}, \quad 4) a_n := \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n \quad 5) a_n := nq^n, \quad |q| < 1,$$

$$6) \frac{a^n}{1+a^n}, \quad a > 0$$

Beweis

1) konvergiert mit Quotientenkriterium

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^a n!}{(n+1)! n^a} = \frac{(n+1)^a n!}{(n+1)n! n^a} = \frac{1}{(n+1)} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1$$

2): konvergiert mit Quotientenkriterium

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = \frac{2 \cdot 2^n (n+1)n!}{(n+1) \cdot (n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = \frac{2 \cdot n^n}{(n+1)^n} = 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n = \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{e} < 1 \end{aligned}$$

3) konvergiert mit Wurzelkriterium

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n^4}{3^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^4}}{3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} < 1$$

4) konvergiert mit Wurzelkriterium

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n} = \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1$$

5) konvergiert mit Wurzelkriterium

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{nq^n} = q \cdot \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} q < 1$$

6) Für $a < 1$ gilt:

$$\frac{a^n}{1+a^n} < a^n \Rightarrow \text{konv. mit geometr. Reihe und Majorantenkriterium}$$

Für $a \geq 1$ gilt:

$$\frac{a^n}{1+a^n} = \frac{a^n}{a^n \left(1 + \frac{1}{a^n}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a^n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Divergenz nach notwendigem Kriterium

A3.4: Berechne den Konvergenzradius der beiden folgenden Potenzreihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)} x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n} x^n$$

Beweis:

Für die erste benutzen wir Cauchy/Hadamard (Quotientenkriterium):

$$\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} = \frac{\ln(n)}{\ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n) \left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Der Konvergenzradius ist also $R = 1$.

Für die zweite benutzen wir Euler (Wurzelkriterium): Es gilt

$$\sqrt[n]{\frac{1}{3^n + 2^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{3^n \cdot \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}}$$

Für den rechten Faktor benutzen wir das Sandwichlemma:

$$1 \xleftarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \leq \sqrt[n]{1 + 1^n} \leq \sqrt[n]{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Insgesamt ist also

$$R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n + 3^n}} = \frac{1}{3} \Rightarrow R = 3$$

4 Xi-Finder und ihre Anwendungen

Viele Aufgaben sind vom Typ „Finden Sie ein ξ , sodass...“ oder erfordern dies in einem Zwischenschritt. Hilfreiche Sätze dafür sind:

Zwischenwertsatz: Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) \neq f(b)$. Dann gilt: Für jedes $y \in [f(a), f(b)]$ (bzw. $y \in [f(b), f(a)]$) existiert ein $\xi \in]a, b[$, sodass $f(\xi) = y$.

Satz von Rolle: Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Gilt $f(a) = f(b)$, so existiert ein $\xi \in]a, b[$, sodass $f'(\xi) = 0$.

Mittelwertsatz der Differentialrechnung: Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in]a, b[$, sodass

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Verallgemeinerter Mittelwertsatz: Es seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Ferner sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$. Dann ist $g(b) \neq g(a)$ und es gibt ein $\xi \in]a, b[$, sodass

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Satz von Taylor: siehe Kapitel 1

A4.1 Weise nach, dass die folgende Funktion eine Nullstelle besitzt:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := e^x + xe^{-x}$$

Beweis: Es gilt

$$f(-1) = \frac{1}{e} - e < 0 \text{ und } f(1) = e + \frac{1}{e} > 0$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert also ein $\xi \in [-1, 1]$, sodass $f(\xi) = 0$.

A4.2: Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(1)$. Zeige: Es gibt ein $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$, sodass $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{2})$.

Beweis: Definiere $g : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto f(x) - f(x + \frac{1}{2})$. Dann ist

$$g(0) = f(0) - f(\frac{1}{2}) = f(1) - f(\frac{1}{2}) = -g(\frac{1}{2})$$

Dann ist entweder $g(0) = g(\frac{1}{2}) = 0$ und wir setzen zB $\xi := 0$. Oder es ist o.E. $g(0) > 0$. Dann ist $g(\frac{1}{2}) < 0$ und nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $0 = g(\xi) = f(\xi) - f(\xi + \frac{1}{2})$. In jedem Fall gilt $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{2})$.

A4.3: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und in $]a, b[$ n -mal stetig differenzierbare Funktion mit $n+1$ verschiedenen Nullstellen. Dann hat $f^{(n)}$ auch noch eine Nullstelle in $]a, b[$.

Beweis: Es seien $x_{0,1}, \dots, x_{0,n+1} \in [a, b]$ die $n+1$ Nullstellen von f . Es gilt also

$$f(x_{0,1}) = \dots = f(x_{0,n+1}) = 0$$

Wenden man auf je zwei dieser Stellen den Satz von Rolle an, so folgt: Es existieren $x_{1,1}, \dots, x_{1,n} \in]a, b[$, alle paarweise verschieden, sodass

$$f'(x_{1,1}) = \dots = f'(x_{1,n}) = 0$$

Die erste Ableitung hat also n Nullstellen. Wenden wir auf je zwei dieser neuen Stellen den Satz von Rolle an, so folgt: Es existieren $x_{2,1}, \dots, x_{2,n-1} \in]a, b[$, sodass

$$f''(x_{2,1}) = \dots = f''(x_{2,n-1}) = 0$$

Die zweite Ableitung hat also $(n-1)$ Nullstellen. Unter n -facher Anwendung des Satzes von Rolle erhalten wir also: Die n -te Ableitung hat eine Nullstelle.

A4.4: Beweise die folgenden Ungleichungen

- (i) $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$
- (ii) $px^{p-1}(y-x) \leq y^p - x^p \leq py^{p-1}(y-x)$ für $y-x > 0$, $p > 1$
- (iii) $|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|$
- (iv) $\frac{b-a}{b} \leq \ln\left(\frac{b}{a}\right) \leq \frac{b-a}{a}$, $b > a > 0$

Beweis: Strategie ist jedes Mal der Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

(i) Für $\sin(x)$ erhalten wir:

$$|\sin(x) - \sin(y)| = |\sin'(\xi)| |x - y| = |\cos(\xi)| |x - y| \leq |x - y|$$

(ii) Für $f(x) := x^p$ ist $f'(x) = px^{p-1}$ und da $p > 1$, ist f' monoton steigend. Folglich gilt:

$$px^{p-1} \leq p\xi^{p-1} = f'(\xi) = \frac{y^p - x^p}{y - x} = f'(\xi) = p\xi^{p-1} \leq py^{p-1}$$

(iii) $|\arctan(x) - \arctan(y)| = |\arctan'(\xi)| |x - y| = \left| \frac{1}{1 + \xi^2} \right| |x - y| \leq |x - y|$

(iv) Es ist $\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln(b) - \ln(a) = \ln'(\xi)(b-a) = \frac{b-a}{\xi}$ und außerdem gilt:

$$\frac{b-a}{b} \leq \frac{b-a}{\xi} \leq \frac{b-a}{a}.$$

A4.5 (Schränkensatz): Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist f auf $[a, b]$ Lipschitz-stetig, d.h. es existiert ein $L > 0$, sodass für alle $x, y \in [a, b]$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

Beweis:

$$|f(x) - f(y)| \stackrel{(1)}{=} |f'(\xi)| \cdot |x - y| \stackrel{(2)}{\leq} \underbrace{\max_{\xi \in [a,b]} |f'(\xi)|}_{=:L} \cdot |x - y| = L \cdot |x - y|$$

(1): Hier verwenden wir den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

(2): Nach Voraussetzung ist f stetig differenzierbar. Also nimmt die stetige Funktion f' auf dem Kompaktum $[a, b]$ ihr Maximum an.

Das ist übrigens ein sehr hilfreiches Kriterium, um Lipschitz-Stetigkeit von Funktionen nachzuweisen.

5 Sonstiges

Aufgrund vielfältiger Nachfrage hier nochmals:

Satz: Es sei (a_n) komplexe Folge und es sei

$$A := \{h \in \mathbb{C} \mid h \text{ ist partieller Grenzwert (Häufungspunkt) von } a_n\}$$

Dann gilt: $A = \overline{A}$, d.h. A ist abgeschlossen.

Beweis: Falls $A = \emptyset$ ist nichts zu zeigen. Sei daher $A \neq \emptyset$. Wir müssen zeigen, dass A alle seine Häufungspunkte enthält. Angenommen, A wäre nicht abgeschlossen. Dann existiert ein $h \in \mathbb{C}$, so dass gilt:

(i) h ist Häufungspunkt von A

(ii) $h \notin A$

Dies führen wir nun in zwei Schritten zum Widerspruch. Eigenschaft (ii) bedeutet, dass h kein partieller Grenzwert von (a_n) ist. Folglich existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass in $U_\varepsilon(h)$ nur endlich viele Folgenglieder von (a_n) liegen.

Eigenschaft (i) bedeutet, dass in $U_\varepsilon(h)$ ein Element a aus A liegt mit $a \neq h$. Also:

$\exists a \in U_\varepsilon(h) \cap A$. Da $a \in A$ ist also a ein partieller Grenzwert von (a_n) . Definiert man $r := \frac{1}{2}(\varepsilon - \|x - h\|)$ so gilt daher, dass in $U_r(x) \subset U_\varepsilon(h)$ unendlich viele Glieder von (a_n) liegen müssen. Somit müssen auch in $U_\varepsilon(h)$ unendlich viele Glieder von (a_n) liegen müssen. Widerspruch zu (i)!

Repetitorium Analysis I

WS 08/09

Repetitorium Analysis I	1
1 Reihen und Potenzreihen	1
1.1 Potenzreihen	6
2 Satz von de l'Hospital	7
3 Stetigkeit & Zwischenwertsatz	9
3.1 Exkurs: Prädikatenlogik	10
3.2 Xi-Finder	12
4 Funktionenfolgen	15

Dies ist ein Script zum Repetitorium Analysis I, gehalten in den Ferien des Wintersemesters 08/09 an der Uni Bonn von Nikolai Nowaczyk, Elias Esselborn und Simon Markett. Jedes Repetitorium bestand aus fünf zweistündigen Übungen, die sich inhaltlich an der Vorlesung von Werner Müller und den Übungen von Arthur Wotzke orientierten. Die Aufgaben wurden sorgfältig ausgewählt und überprüft, wir übernehmen aber keine Garantie für die Korrektheit. Sollte jemand einen Fehler finden, so möge er sich bitte melden

Subject: Bugreport RepAna1WS08/09, To: nikno@uni-bonn.de

1 Reihen und Potenzreihen

In diesem Themenblock haben wir wichtige Konvergenzkriterien für unendliche Reihen wiederholt, hauptsächlich Wurzel- und Quotientenkriterium. Hier gab es große Verwirrung, weil diese Kriterien in Vorlesung, Königsberger, Forster oder Formelsammlung behandelt werden und jedes Mal „anders“ aussehen. Um die Verwirrung perfekt zu machen, formulieren wir sie nun nochmals „anders“:

Wurzelkriterium: Sei (a_n) komplexe Folge.

$$(a) \text{ Konvergenzkriterium: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

$$\Rightarrow \exists q \in \mathbb{R} : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \Rightarrow |a_n| \leq q^n, q < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

$$(b) \text{ Divergenzkriterium: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

$$\Rightarrow \text{Es gibt eine Teilfolge } (a_{n_k}) \text{ mit } \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geq 1 \Rightarrow |a_{n_k}| \geq 1$$

$$\Rightarrow (a_n) \text{ kann nicht gegen Null gehen}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

Wir haben das so komisch aufgeschrieben, weil jetzt hoffentlich klar wird, wie die unterschiedlichen Formulierungen des Wurzelkriteriums miteinander zusammenhängen: Die obigen beiden Implikationsketten sind nichts anderes als eine Beweisskizze des Wurzelkriteriums. Man darf sich daraus für eine konkret vorgelegte Reihe sein Wunsch-Wurzelkriterium zusammenbauen. Um die Konvergenz einer Reihe zu beweisen, kann man sich aussuchen, ob man

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1, 2) \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \text{ oder } 3) \exists q \in \mathbb{R} : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$$

nachrechnen möchte. In allen drei Fällen darf man den Beweis mit „Daraus folgt die Konvergenz von $\sum_n a_n$ nach dem Wurzelkriterium“ schließen. Es sei allerdings darauf hingewiesen, dass in 99% aller Fälle die erste Bedingung $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ mit Abstand am einfachsten nachzurechnen ist, weil man dafür die Grenzwertsätze benutzen darf.

Quotientenkriterium: Sei (a_n) komplexe Folge mit $a_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

$$(a) \text{ Konvergenzkriterium: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

$$\Rightarrow \exists q \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q < 1 \Rightarrow |a_{n+1}| \leq q^{n-N} |a_N|$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

$$(b) \text{ Divergenzkriterium: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n \neq 0 \text{ und } \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1 \Rightarrow |a_{n+1}| \geq |a_N| > 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergiert.}$$

Auch dieses Kriterium haben wir mit Absicht so aufgeschrieben, dass es hoffentlich alle Formulierungen, die ihr gefunden habt, in Konsistenz zueinander bringt.

Bemerkung 1: Beide Sätze liefern hinreichende Kriterien für absolute Konvergenz. Reihen, denen man von vorne herein ansehen kann, dass sie nicht absolut konvergieren können, sondern wenn überhaupt nur bedingt, sind für diese Kriterien also ungeeignet. Bedingt konvergente Reihen sind oft von der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Hier hilft oft das Leibnitz-Kriterium weiter.

Bemerkung 2: Der im Zusammenhang mit diesen Kriterien mit Abstand am meisten begangene Fehler ist der folgende: Eine Reihe ist vorgelegt, man erhält

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \text{ oder } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$$

und trifft nun Aussagen über das Konvergenzverhalten der zugehörigen Reihe. Warum führt das in die Katastrophe?

A1: Berechne zu diesem Zweck

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}$$

für $a_n := \frac{1}{n}$ und $b_n := \frac{1}{n^2}$.

Lösung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} = 1 \cdot 1 = 1$$

Aus Vorlesung und Übungen wissen wir jedoch, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergiert, aber } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konvergiert}$$

Falls bei einer Analyse solcher Grenzwerte also 1 herauskommt, nutzt uns das nichts. Das ist bitter, aber nicht zu ändern. Es existiert keine sinnvolle Verallgemeinerung dieser Kriterien, die dann auch noch eine Aussage zulässt.

Als nächstes kann man sich die Frage stellen, wieso in allen Kriterien überall $\limsup$ steht, nur bei der Divergenz im Wurzelkriterium nicht. Warum steht dort $\liminf$ und nicht auch $\limsup$?

A2: Zeige, dass die Bedingung $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|/|a_n| > 1$ nicht hinreichend ist für Divergenz von $\sum a_n$.

Betrachte dazu als Gegenbeispiel die Folge

$$a_n := \begin{cases} 2^{-n}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 3^{-n}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

und berechne

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Lösung: Da die Folge durch eine Fallunterscheidung definiert ist, machen wir auch eine:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \begin{cases} \frac{3^{-(n+1)}}{2^{-n}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{für } n \text{ gerade} \\ \frac{2^{-(n+1)}}{3^{-n}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die obere Folge konvergiert gegen Null, die untere gegen unendlich. Die Quotientenfolge hat also zwei relevante Teilfolgen und es folgt:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0 < 1 \text{ und } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \infty > 1$$

Wenden wir nun das Wurzelkriterium an, so erhalten wir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 2^{-1} & \text{für } n \text{ gerade} \\ 3^{-1} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \leq \frac{1}{2} < 1$$

Hier hat die Wurzelfolge $\sqrt[n]{|a_n|}$ genau zwei Häufungspunkte, nämlich $1/2$ und $1/3$, welche beide kleiner sind als 1. Folglich konvergiert $\sum a_n$ absolut. Das hätte man übrigens auch einfacher haben können:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ konvergiert mit geometr. Reihe}$$

Aufgrund der absoluten Konvergenz darf die Reihe umsortiert werden und man kann sogar explizit den Grenzwert bestimmen:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{41}{24}\end{aligned}$$

Im Quotientenkriterium steht beim Divergenzfall also der $\liminf$, weil der Satz mit $\limsup$ falsch wäre. Denn der würde über obige Folge aussagen, dass sie divergiert. Nachdem wir jetzt gesehen haben, wo die Kriterien versagen, wollen wir ein paar Aufgaben rechnen, wo sie funktionieren:

A3: Entscheide, ob die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ konvergiert oder nicht für

- 1) $a_n := \frac{n^a}{n!}$, $a \in \mathbb{Q}$, 2) $a_n := \frac{2^n n!}{n^n}$ 3) $a_n := \frac{n^4}{3^n}$, 4) $a_n := (\sqrt[n]{n} - 1)^n$ 5) $a_n := nq^n$, $|q| < 1$,
6) $\frac{a^n}{1+a^n}$, $a > 0$

Beweis

1) konvergiert mit Quotientenkriterium

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^a \frac{n!}{n^a}}{(n+1)! \frac{n!}{n^a}} = \frac{(n+1)^a}{(n+1)n!} \frac{n!}{n^a} = \frac{1}{(n+1)} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1$$

2): konvergiert mit Quotientenkriterium

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = \frac{2 \cdot 2^n (n+1)n!}{(n+1) \cdot (n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = \frac{2 \cdot n^n}{(n+1)^n} = 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{e} < 1\end{aligned}$$

3) konvergiert mit Wurzelkriterium

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n^4}{3^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^4}}{3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} < 1$$

4) konvergiert mit Wurzelkriterium

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n} = \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1$$

5) konvergiert mit Wurzelkriterium

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{nq^n} = q \cdot \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} q < 1$$

6) Für $a < 1$ gilt:

$$\frac{a^n}{1+a^n} < a^n \Rightarrow \text{konv. mit geometr. Reihe und Majorantenkriterium}$$

Für $a \geq 1$ gilt:

$$\frac{a^n}{1+a^n} = \frac{a^n}{a^n \left(1 + \frac{1}{a^n}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a^n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Divergenz nach notwendigem Kriterium

A4: Berechne den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)} x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n} x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin(n) + 9^n} x^{2n}$$

Beweis:

Für die erste benutzen wir Cauchy/Hadamard (Quotientenkriterium):

$$\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} = \frac{\ln(n)}{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Der Konvergenzradius ist also $R = 1$.

Für die zweite benutzen wir Euler (Wurzelkriterium): Es gilt

$$\sqrt[n]{\frac{1}{3^n + 2^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{3^n \cdot \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}}$$

Für den rechten Faktor benutzen wir das Sandwichlemma:

$$1 \xleftarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \leq \sqrt[n]{1 + 1^n} \leq \sqrt[n]{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Insgesamt ist also

$$R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n + 3^n}} = \frac{1}{3} \Rightarrow R = 3$$

Bei der dritten substituieren wir zunächst $y := x^2$ und analysieren

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin(n) + 9^n} y^n$$

erneut mit dem Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{\sin(n) + 9^n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{9^n \frac{\sin(n)}{9^n} + 1}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{\sin(n)}{9^n} + 1}}$$

Für den rechten Ausdruck verwenden wir erneut das Sandwichlemma

$$1 \xleftarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{8}{9}} \leq \sqrt[n]{\frac{-1}{9^n} + 1} \leq \sqrt[n]{\frac{\sin(n)}{9^n} + 1} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{9^n} + 1} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{9} + 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Also ist der Konvergenzradius der ursprünglichen Potenzreihe

$$R = \sqrt{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\sin(n) + 9^n}}\right)^{-1}} = \sqrt{9} = 3$$

Insbesondere für Reihen, denen man sofort ansieht, dass sie nicht absolut konvergieren, aber möglicherweise bedingt, eignet sich das **Leibniz-Kriterium**: Es besagt: Sei (a_n) eine reelle monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Die Monotonie wird oft vergessen. Das kann fatal sein, wie das Beispiel

$$a_n := \begin{cases} \frac{2}{n}, & n \text{ gerade}, n \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zeigt. Denn die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergiert.

1.1 Potenzreihen

Die Behandlung von Potenzreihen verhält sich nicht großartig anders. Die Fragestellung ist die folgende. Gegeben sei eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

wobei (a_n) eine komplexe Folge und $z \in \mathbb{C}$ ist. Gesucht ist der Konvergenzradius, d.h.

$$\sup \left\{ R > 0 \mid \forall z \in \mathbb{C} : |z| < R \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ konvergiert} \right\}$$

Diesen können wir nun mit obigen Kriterien ebenfalls bestimmen: Hält man ein $z \in \mathbb{C}$ fest, so ergibt beispielsweise das Wurzelkriterium die Forderung

$$1 > \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \Leftrightarrow |z| < \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$$

Der Konvergenzradius R kann also berechnet werden mittels

$$R = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} \text{ „Cauchy-Hadamard“}$$

Aus dem Wurzelkriterium folgt also, dass die Potenzreihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$ und divergiert für alle $|z| > R$. Über das Konvergenzverhalten auf dem Rand $\{|z| = R\}$ kann zunächst nichts ausgesagt werden.

Alternativ kann auch das Quotientenkriterium angewendet werden. Dieses liefert die Forderung

$$1 > \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |z| \Leftrightarrow |z| < \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \right)^{-1}$$

Der Konvergenzradius kann also auch berechnet werden mittels

$$R = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \right)^{-1} \text{ „Euler“}$$

Man beachte, dass das nur funktioniert, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|/|a_n|$ wirklich konvergiert. Es kann hier nicht mit Häufungspunkten gearbeitet werden, weil das Quotientenkriterium die i.A. verschiedenen Häufungspunkte

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

zur Entscheidung über Konvergenz bzw. Divergenz verwendet.

2 Satz von de l'Hospital

Beim Bestimmen von Grenzwerten haben wir oft das Problem, dass wir die Grenzwertsätze nicht direkt anwenden können, weil wir einen Ausdruck der Form

$$\text{„} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{0}{0} \text{“ oder „} \frac{\infty}{\infty} \text{“}$$

vorliegen haben. Zähler und Nenner konvergieren entweder beide gegen Null oder divergieren beide bestimmt gegen ∞ . Da $0/0$ nicht definiert und ∞ keine reelle Zahl ist, darf man die Grenzwertsätze hier nicht anwenden. Eine Lösung für dieses Dilemma ist der

Satz (von Guillaume François Antoine, Marquis de L'Hospital): Seien $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$ und entweder

$$\text{A) } \lim_{x \searrow a} f(x) = 0, \lim_{x \searrow a} g(x) = 0$$

oder

$$\text{B) } \lim_{x \searrow a} f(x) = \infty, \lim_{x \searrow a} g(x) = \infty$$

Dann gilt: Existiert $\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch $\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt:

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Analoges gilt für $x \nearrow b$, $x \rightarrow x_0 \in]a, b[$, $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$.

Bemerkung: Meist erfüllen die Funktionen, auf die man diesen Satz anwenden möchte viel stärkere Voraussetzungen. Da der Satz für Grenzübergänge jeglicher Art gilt, findet er viele Anwendungen. Es ist insbesondere erlaubt ihn mehrfach anzuwenden, d.h. falls auch $f'(x)/g'(x)$ die Voraussetzungen erfüllt, kann man mehrfach „de l'Hospitalen“. Einzige Fehlerquelle ist die Existenzaussage: Falls der Limes $\lim_{x \searrow a} f'(x)/g'(x)$ nicht existiert, so kann man i.A. keine Aussagen über $\lim_{x \searrow a} f(x)/g(x)$ machen. (Siehe Aufgabe 8) Falls übrigens f, g sogar in einer offenen Umgebung von a definiert und stetig differenzierbar sind, dann ist der Beweis sehr einfach:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Folgende Übungsaufgaben sollen den Satz in Aktion demonstrieren:

$$\text{A1: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

$$\text{A2: } \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = -\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$\text{A3: } \lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} \exp(x \cdot \ln(x)) = \exp(0) = 1$$

$$\mathbf{A4:} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(2x)2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(2x)2} = 1$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A5:} \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{3}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{3}{x^2} \ln(1+x^2)\right) = \exp\left(3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right)\right) \\ &= \exp\left(3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x^2)^{-1} 2x}{2x}\right)\right) = \exp\left(3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right) = e^3 \end{aligned}$$

A6:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{\sin(x)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x) + x \cdot \cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \cos(x) - x \sin(x)} = \frac{0}{1+1-0} = 0 \end{aligned}$$

A7: Sind $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ so gilt:

$$\lim_{x \searrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{ab}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \lim_{x \searrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \searrow 0} \exp\left(\frac{\ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)}{x}\right) = \exp\left(\lim_{x \searrow 0} \frac{\ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)}{x}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x \searrow 0} \frac{2}{a^x + b^x} \frac{\ln(a)a^x + \ln(b)b^x}{2}\right) = \exp\left(\lim_{x \searrow 0} \frac{\ln(a)a^x + \ln(b)b^x}{a^x + b^x}\right) \\ &= \exp\left(\frac{\ln(a) + \ln(b)}{2}\right) = \exp\left(\frac{\ln(a)}{2}\right) \exp\left(\frac{\ln(b)}{2}\right) = \sqrt{ab} \end{aligned}$$

A8: Zeige, dass die Umkehrung des Satzes von de l'Hospitale i.A. falsch ist, indem du für $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) := x + \sin(x), \quad g(x) := x$$

die Ausdrücke

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

berechnest.

Lösung:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos(x)}{1} \text{ existiert nicht, aber}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{\sin(x)}{x} = 1 \text{ existiert dennoch.}$$

A9: Zeige, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x)$$

Beweis: Es ist

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(\ln\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right)\right) = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$$

und es gilt nach de l'Hospitale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{x}{n}} \cdot \frac{-1}{n^2} x}{-\frac{1}{n^2}} = x \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{x}{n}} = x$$

Daher mit der Stetigkeit von $\exp$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) = \exp(x)$$

3 Stetigkeit & Zwischenwertsatz

Sei für diesen Abschnitt $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $a \in D$.

Def. (ε - δ -Stetigkeit): Es heißt f ε - δ -stetig bei a , falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall z \in D : |z - a| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon$$

Def. (Folgenstetigkeit): Es heißt f folgenstetig bei a , falls gilt

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$$

Satz: f ist ε - δ -stetig bei $a \Leftrightarrow f$ ist folgenstetig bei a . Daher sagen wir in diesem Fall auch schlicht und ergreifend f ist stetig bei a . Wir sagen f ist stetig, falls f in jedem $a \in D$ stetig ist.

Def. (gleichmäßig stetig): Es heißt f gleichmäßig stetig, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall z_1, z_2 \in D : |z_2 - z_1| < \delta \Rightarrow |f(z_2) - f(z_1)| < \varepsilon$$

Def. (Lipschitz-stetig): Es heißt f Lipschitz-stetig, falls gilt

$$\exists L \in \mathbb{R} : \forall z_1, z_2 \in D : |f(z_2) - f(z_1)| \leq L \cdot |z_2 - z_1|$$

Satz: Es gelten die Implikationen

$$\text{Lipschitz-stetig} \Rightarrow \text{gleichmäßig stetig} \Rightarrow \text{stetig}$$

3.1 Exkurs: Prädikatenlogik

Der Satz, dass aus gleichmäßiger Stetigkeit normale Stetigkeit folgt, hat mit Analysis eigentlich gar nichts zu tun, sondern basiert auf einer Grundtatsache des gesunden Menschenverstandes bzw. der so genannten Prädikatenlogik zweiter Stufe („PL2“). Da diese Tatsache in der Analysis öfter mal vorkommt, wollen hier kurz darauf eingehen.

Es seien M, K zwei Mengen und es sei P ein zweistelliges Prädikat auf $M \times K$, d.h. eine Aussage, die auf ein Tupel $(m, k) \in M \times K$ zutreffen kann oder nicht.

Beispiel: $M := \{\text{Mäuse}\}$, $K := \{\text{Katzen}\}$, $P(m, k) := "m \text{ wird von } k \text{ gefressen}"$

Die Prädikatenlogik zeichnet sich gegenüber der Aussagenlogik dadurch aus, dass sie eben auch solche Prädikate zulässt und darüber hinaus Quantoren und Mengen. In ihr darf man also Aussagen wie etwa

$$\forall m \in M : \exists k \in K : P(m, k)$$

formulieren und untersuchen. Nahezu die gesamte Mathematik baut auf der PL2 auf. Selbst wenn man sich nicht auf Logik und Mengenlehre spezialisieren will, ist es hilfreich, die folgenden Sachverhalte zur Kenntnis genommen zu haben: Wir stellen uns die Frage, ob zwei Quantoren hintereinander kommutieren. Es gilt etwa

$$\forall m \in M : \forall k \in K : P(m, k) \Leftrightarrow \forall k \in K : \forall m \in M : P(m, k)$$

d.h. zwei Allquantoren dürfen in ihrer Reihenfolge vertauscht werden. Selbiges gilt auch für Existenzquantoren:

$$\exists m \in M : \exists k \in K : P(m, k) \Leftrightarrow \exists k \in K : \exists m \in M : P(m, k)$$

Der wirklich interessante Fall tritt auf, wenn wir einen All- und einen Existenzquantor vorliegen haben. Dann gilt nämlich nur

$$\forall m \in M : \exists k \in K : P(m, k) \Leftarrow \exists k \in K : \forall m \in M : P(m, k)$$

Das kann man sich klarmachen, indem man die Aussagen einmal in natürlicher Sprache hinschreibt und blumig ausschmückt.

Die linke Aussage bedeutet: Für jede Maus existiert eine Katze, sodass diese Maus von der Katze gefressen wird. Der existentialistische Kampf der Maus mit der Welt findet also immer ein tragisches Ende.

Die rechte Aussage bedeutet: Es gibt eine Katze, sodass jede Maus von dieser gefressen wird. Es existiert also eine riesige fette Monsterkatze, die sämtliche Mäuse auf der Welt verschlingt. Wir stellen uns das so vor, dass jede Maus von ein und derselben Katze gefressen wird. Formallogisch wäre es hier allerdings nicht ausgeschlossen, dass es mehrere solcher Monsterkatzen gibt, da wir ja in der rechten Aussage nicht „ $\exists! k \in K \dots$ “ geschrieben haben. Dieses Problem kann hier praktisch gesehen aber nicht auftauchen, weil mehrere Monsterkatzen sich dann auch gegenseitig ihre bereits verspeisten und verdauten Mäuse aus den Bäuchen wegfressen müssten.

Der entscheidende Punkt ist hier nicht, ob diese Aussagen wahr sind oder nicht, sondern er besteht darin, dass man erstens erkennt, dass die linke und die rechte Aussage völlig verschieden sind und zweitens, dass trotzdem die linke aus der rechten folgt: Wenn eine Monsterkatze alle Mäuse auffrisst, dann wird insbesondere jede Maus von einer Katze gefressen. Bei der linken Aussage ist es erlaubt, dass es sich bei verschiedenen Mäusen auch um verschiedene Katzen handelt, bei der rechten Aussage gibt es eine Katze, die alle Mäuse frisst.

Es ist wichtig zu verstehen, dass alle drei Gesetze zur Kommutierbarkeit von Quantoren, die wir hier aufgeschrieben haben, nicht aus der Axiomatik der Analysis alleine bewiesen werden können. Die Analysis ist – wie fast alle anderen mathematischen Theorien auch – errichtet auf der Logik und der Mengenlehre und wir verwenden hier deren Resultate. Übrigens folgen bei einer systematischen Axiomatisierung der Prädikatenlogik diese Gesetze relativ direkt aus den Axiomen; es handelt sich nicht um tief liegende Theorien.

Zurück zur Stetigkeit: Schreibt man die Definitionen von gleichmäßiger Stetigkeit und gewöhnlicher $\varepsilon - \delta$ -Stetigkeit hin, so sieht man, dass sie nach obigen Überlegungen auseinander folgendermaßen hervorgehen: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} & \forall a \in D : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall z \in D : |z - a| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow & \forall \varepsilon > 0 : \underline{\forall z_1 \in D : \exists \delta > 0} : \forall z_2 \in D : |z_2 - z_1| < \delta \Rightarrow |f(z_2) - f(z_1)| < \varepsilon \\ \Leftarrow & \forall \varepsilon > 0 : \underline{\exists \delta > 0} : \forall z_1 \in D : \forall z_2 \in D : |z_2 - z_1| < \delta \Rightarrow |f(z_2) - f(z_1)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Bei der ersten Äquivalenz haben wir nur die vordersten beiden Allquantoren vertauscht und die Variablenumbenennung $(a, z) \rightarrow (z_1, z_2)$ durchgeführt. Im zweiten Schritt haben wir die unterstrichenen Quantoren vertauscht und die obige Überlegung angewandt.

Um zu zeigen, dass auch wirklich ein mathematischer Unterschied zwischen gleichmäßiger Stetigkeit und normaler Stetigkeit besteht, betrachten wir folgendes Beispiel, bei dem auch gleich mit auf die Lipschitz-Stetigkeit eingegangen wird.

Beispiel: Zeige, dass die Umkehrungen der Implikationen

$$\text{Lipschitz-stetig} \Rightarrow \text{gleichmäßig stetig} \Rightarrow \text{stetig}$$

i.A. falsch sind. Betrachte dazu die Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ und $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$.

Zeige

- (a) f ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig
- (b) g ist gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig

Beweis:

a) Die Stetigkeit von f sieht man am besten durch Folgenstetigkeit und Grenzwertsätze:

$$\forall a \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x^2 = \lim_{x \rightarrow a} x \cdot \lim_{x \rightarrow a} x = a^2 = f(a)$$

Jedoch ist f nicht gleichmäßig stetig. Denn angenommen, dies wäre der Fall: Dann gäbe es zu $\varepsilon := 1$ ein $\delta > 0$, sodass

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |x_2^2 - x_1^2| < 1$$

Wähle nun ein beliebiges festes $x_1 > \frac{1}{\delta}$. Dann gilt für $x_2 := x_1 + \frac{\delta}{2}$, dass

$$|x_2 - x_1| = x_1 + \frac{\delta}{2} - x_1 = \frac{\delta}{2} < \delta$$

Folglich müsste aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit $|x_2^2 - x_1^2| < 1$ gelten. Es gilt aber andererseits mittels dritter binomischer Formel und nach Wahl von x_1 :

$$|x_2^2 - x_1^2| = |x_2 - x_1| |x_2 + x_1| = \left| x_1 + \frac{\delta}{2} - x_1 \right| \left| x_1 + \frac{\delta}{2} + x_1 \right| = \frac{\delta}{2} \left(2x_1 + \frac{\delta}{2} \right) = \delta x_1 + \frac{\delta^2}{4} > \delta x_1 > \delta \frac{1}{\delta} = 1$$

Widerspruch!

b) Zunächst ist g gleichmäßig stetig: Sei $\varepsilon > 0$, dann gilt mit $\delta := \varepsilon^2$

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0} : |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |g(x_2) - g(x_1)| = |\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}| \stackrel{(*)}{\leq} \sqrt{|x_2 - x_1|} \leq \sqrt{\delta} = \varepsilon$$

(*) : Wir verwenden hier die Subadditivität der Wurzel, welche man wie folgt einsehen kann: Es sei zunächst o.E. $x_2 \geq x_1 \geq 0$. Dann gilt mittels binomischer Formel

$$\begin{aligned} \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} & \leq \sqrt{x_2 - x_1} \Leftrightarrow \sqrt{x_2}^2 - 2\sqrt{x_2}\sqrt{x_1} + \sqrt{x_1}^2 \leq \sqrt{x_2 - x_1}^2 \\ \Leftrightarrow x_2 - 2\sqrt{x_2}\sqrt{x_1} + x_1 & \leq x_2 - x_1 \Leftrightarrow -2\sqrt{x_2}\sqrt{x_1} + 2x_1 \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{x_2}\sqrt{x_1} + x_1 \leq 0 \end{aligned}$$

Dass die letzte Ungleichung gilt, kann man so einsehen:

$$0 = -x_1 + x_1 = -\sqrt{x_1}\sqrt{x_1} + x_1 \leq -\sqrt{x_2}\sqrt{x_1} + x_1$$

denn n.V. ist $x_2 \geq x_1$. Eine analoge Abschätzung ist gültig, falls $x_1 \geq x_2$ und somit gilt die Aussage auch mit den Beträgen.

Außerdem ist g nicht Lipschitz-stetig. Denn wählt man einfach $x_1 := 0$ so folgt

$$\frac{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{\sqrt{x_2}}{x_2} = \frac{1}{\sqrt{x_2}} \xrightarrow{x_2 \rightarrow 0} \infty$$

Folglich ist

$$\frac{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}{x_2 - x_1}$$

durch kein endliches $L \in \mathbb{R}$ beschränkt.

3.2 Xi-Finder

Viele Aufgaben sind vom Typ „Finden Sie ein ξ , sodass...“ oder erfordern dies in einem Zwischenschritt. Hilfreiche Sätze dafür sind:

Zwischenwertsatz: Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) \neq f(b)$. Dann gilt: Für jedes $y \in [f(a), f(b)]$ (bzw. $y \in [f(b), f(a)]$) existiert ein $\xi \in]a, b[$, sodass $f(\xi) = y$.

Satz von Rolle: Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Gilt $f(a) = f(b)$, so existiert ein $\xi \in]a, b[$, sodass $f'(\xi) = 0$.

Mittelwertsatz der Differentialrechnung: Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in]a, b[$, sodass

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Verallgemeinerter Mittelwertsatz: Es seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Ferner sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$. Dann ist $g(b) \neq g(a)$ und es gibt ein $\xi \in]a, b[$, sodass

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Die folgenden Aufgaben beschäftigen sich mit Stetigkeit im Allgemeinen und demonstrieren insbesondere den Zwischenwertsatz in Aktion. Die letzten Aufgaben beziehen sich auf den Satz von Rolle und den Mittelwertsatz.

A1 Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$. Zeige, dass dann $f \equiv g$.

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Falls $x \in \mathbb{Q}$, gilt $f(x) = g(x)$ nach Voraussetzung. Ansonsten ist $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und es gibt eine Folge (q_n) rationaler Zahlen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = x$. Verwendet man Folgenstetigkeit, so erhält man

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} q_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(q_n) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} q_n\right) = g(x)$$

A2 Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $a \in \mathbb{R}$ und $f(a) > 0$. Zeige: Es gibt ein $\delta > 0$, sodass $f|_{B_\delta(a)} > 0$.

Beweis: Da $f(a) > 0$ existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass

$$f(a) + \varepsilon > f(a) > f(a) - \varepsilon > 0$$

Wegen der Stetigkeit von f existiert also auch ein $\delta > 0$, sodass $f|_{B_\delta(a)} > 0$.

A3 Bestimme den Grenzwert von $\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$ für $x \rightarrow \infty$.

Beweis: Verwendet man die Stetigkeit der Wurzel und die dritte binomische Formel, so erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{x} - x}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

A4 Weise nach, dass die folgende Funktion eine Nullstelle besitzt:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := e^x + xe^{-x}$$

Beweis: Es ist

$$f(0) = 1 > 0, f(-1) = \frac{1}{e} - e < 0$$

Also gilt nach dem ZWS: $\exists \xi \in [-1, 0]: f(\xi) = 0$.

A5 Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und es gelte

$$f(a)f(b) < 0$$

Zeige: $\exists \xi \in [a, b]: f(\xi) = 0$.

Beweis: Folgt direkt aus dem ZWS da entweder

$$f(a) > 0 \text{ und } f(b) < 0$$

oder umgekehrt.

A6 Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit

$$g(a) = f(b) \text{ und } g(b) = f(a)$$

Zeige: $\exists \xi \in [a, b]: f(\xi) = g(\xi)$

Beweis:

Es gilt

$$(f - g)(a) = f(a) - g(a) = g(b) - f(b) = -(f - g)(b)$$

A7 Sei $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ stetig. Zeige: $\exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = \xi$

Beweis: Definiere $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(x) := f(x) - x$$

Fall 1: Ist $f(a) = a$ oder $f(b) = b$, dann wählen wir halt $\xi = a$ oder $\xi = b$

Fall 2: Es ist $f(a) > a$ und $f(b) < b$. Dann ist

$$g(a) = f(a) - a > 0, \quad g(b) = f(b) - b < 0$$

Aus ZWS folgt die Behauptung.

A8 Jedes reelle Polynom ungeraden Grades hat eine Nullstelle.

Beweis: Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k$, $n \in \mathbb{N}$, ein solches Polynom. Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2n+1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n+1} = -\infty$$

Folglich existieren $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $p(a) > 0$ und $p(b) < 0$. Nach dem ZWS existiert also auch eine Nullstelle.

A9 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und in $]a, b[$ zwei mal stetig differenzierbare Funktion mit 3 verschiedenen Nullstellen. Dann hat f'' auch noch eine Nullstelle in $]a, b[$.

Beweis: Hier verwenden wir den Satz von Rolle: Es gebe drei verschiedene $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in [a, b]$, sodass

$$f(\xi_1) = f(\xi_2) = f(\xi_3) = 0$$

Dann existieren nach dem Satz von Rolle zwei verschiedene $\eta_1, \eta_2 \in [a, b]$, sodass

$$f'(\eta_1) = f'(\eta_2) = 0$$

Erneute Anwendung des Satzes von Rolle liefert schließlich ein $\gamma \in [a, b]$, sodass

$$f''(\gamma) = 0$$

A10 Eine stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig.

Beweis: Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)(y - x)| \leq \max_{\xi \in [a, b]} |f'(\xi)| \cdot |y - x|$$

Dass das Maximum auch wirklich angenommen wird, folgt aus der Stetigkeit von f' und der Kompaktheit von $[a, b]$.

A11 Zeige für $x, y \in \mathbb{R}$

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$$

Beweis: Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$|\sin(x) - \sin(y)| = |\sin'(\xi)| |x - y| = |\cos(\xi)| |x - y| \leq |x - y|$$

4 Funktionenfolgen

Def. (punktweise / gleichmäßig konvergent): Sei $D \subset \mathbb{C}$.

a) Eine Folge von Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert *punktweise* gegen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, falls gilt:

$$\forall z \in D : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$$

In Quantoren:

$$\forall z \in D : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

b) Die Folge $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert *gleichmäßig*, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \forall z \in D : |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

Auch hier gilt nach prädikatenlogischen Grundtatsachen

$$f_n \text{ konvergiert gleichmäßig} \Rightarrow f_n \text{ konvergiert punktweise}$$

Die Umkehrung ist i.A. falsch.

Es gibt nun mehrere Sätze, welche aus analytischen Eigenschaften der f_n Rückschlüsse auf die Eigenschaften von f zulassen. Am wichtigsten ist für uns der

Satz: Sei $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen. Dann ist auch der Limes $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Sei $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$. Untersuche, ob f_n punktweise bzw. gleichmäßig gegen ein $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert und finde dieses f für

A1 $D := \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{n}{n^2 + x^2}$

f_n konvergiert gleichmäßig gegen 0, denn

$$\left| \frac{n}{n^2 + x^2} \right| \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

A2 $D := [0, 1]$, $f_n(x) := \frac{nx}{1 + nx^2}$

f_n konvergiert punktweise: Für $x \neq 0$ ist

$$\frac{nx}{1+nx^2} = \frac{x}{\frac{1}{n} + x^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$$

und für $x = 0$ ist $f_n(x) = 0$. Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig, da sonst die Grenzfunktion stetig sein müsste.

A3 $D := [-1, 1]$, $f_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$

f_n konvergiert gleichmäßig gegen $\exp$, denn für jedes $x \in [-1, 1]$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$$

und es gilt

$$|f_n(x) - \exp(x)| = \left| \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{x^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

A4 $D := [0, 1]$, $f_n(x) := x^n$

Konvergiert punktweise: Für $0 \leq x < 1$ gilt

$$f_n(x) = x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

und für $x = 1$ ist

$$f_n(x) = 1^n = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig, da dann die Grenzfunktion stetig sein müsste, was aber nicht der Fall ist.

A5 $D := [0, 1]$, $f_n(x) := \begin{cases} nx & , x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 2 - nx & , x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & , x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$

Die Funktion konvergiert punktweise: Für $0 < x \leq 1$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\forall n \geq N : \frac{2}{n} < x$ und somit ist $f_n(x) = 0$ für fast alle n . Also ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Für $x = 0$ ist

$$f_n(0) = 0$$

und somit konvergiert $f_n \rightarrow 0$ punktweise.

Die Konvergenz ist aber nicht gleichmäßig, weil

$$\|f_n - f\|_{\infty} = \|f_n\|_{\infty} \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 2 - n \cdot \frac{1}{n} = 2 - 1 = 1$$

A6 Seien $(f_n), (g_n)$ Folgen beschränkter Funktionen auf D , die gleichmäßig gegen ein f bzw. g konvergieren. Zeige: $f_n \cdot g_n$ konvergiert gleichmäßig gegen $f \cdot g$.

Beweis: Da f_n, g_n beschränkt sind und gleichmäßig konvergieren, sind auch f, g beschränkt: Sei etwa $\varepsilon = 1$, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\|f\| - \|f_N\| \leq \|f_N - f\| < 1 \Leftrightarrow \|f\| \leq 1 + \|f_N\| =: K$$

denn f_N ist nach Voraussetzung beschränkt. Gleiches gilt für g .

Aus der gleichmäßigen Konvergenz der g_n folgt weiter, dass die g_n auch gleichmäßig beschränkt sind, d.h.

$$\exists L \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : \|g_n\| \leq L$$

Denn analog existiert auch hier zu $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall n \geq N : \|g_n\| - \|g\| \leq \|g_n - g\| \leq 1 \Leftrightarrow \|g_n\| \leq 1 + \|g\| =: L$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz der (f_n) ein $N_1 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall n \geq N_1 : \|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2K}$$

Analog existiert ein $N_2 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall n \geq N_2 : \|g_n - g\| < \frac{\varepsilon}{2L}$$

Also gilt für alle $n \geq N := \max(N_1, N_2)$:

$$\begin{aligned} \|f_n g_n - f g\| &= \|f_n g_n - f g_n + f g_n - f g\| \\ &\leq \|f_n - f\| \|g_n\| + \|g_n - g\| \|f\| \leq \frac{\varepsilon}{2K} K + \frac{\varepsilon}{2L} L = \varepsilon \end{aligned}$$

A7 Es sei (f_n) eine gleichmäßig gegen f konvergente Funktionenfolge. Es gebe ein $a > 0$, sodass

$$\forall x \in D : |f_n(x)| \geq a$$

Dann konvergiert $\frac{1}{f_n}$ gleichmäßig gegen $\frac{1}{f}$.

Beweis: Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz der f_n existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\forall n \geq N : \|f_n - f\| \leq \varepsilon \cdot a \|f\|$$

$$\left\| \frac{1}{f_n} - \frac{1}{f} \right\| = \frac{\|f_n - f\|}{\|f_n\| \|f\|} \leq \frac{\|f_n - f\|}{a \|f\|} \leq \frac{\varepsilon a \|f\|}{a \|f\|} = \varepsilon$$

Aufgabenblatt 1: Unendliche Reihen

A1: Entscheide, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert oder nicht für



1) $a_n := \frac{n^a}{n!}, a \in \mathbb{Q}$

2) $a_n := \frac{2^n n!}{n^n}$

3) $a_n := \frac{n^4}{3^n}$

4) $a_n := (\sqrt[n]{n} - 1)^n$

5) $a_n := nq^n, |q| < 1$

6) $a_n := \frac{a^n}{1+a^n}, a > 0$

A2: Berechne den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)} x^n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n} x^n, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin(n) + 9^n} x^{2n}$$

A3: Berechne für

$$a_n := \frac{1}{n} \text{ und } b_n := \frac{1}{n^2}.$$

die Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}$$

Was wissen wir über das Konvergenzverhalten von

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} ?$$

A4: Zeige, dass die Bedingung

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$$

nicht hinreichend ist für Divergenz von $\sum_n a_n$. Betrachte dazu als Gegenbeispiel die Folge

$$a_n := \begin{cases} 2^{-n}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 3^{-n}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

und berechne

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Aufgabenblatt 2: Regel von de l'Hospital

Berechne die folgenden Grenzwerte.

A1: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$

A2: $\lim_{x \searrow 0} (x \cdot \ln(x))$

A3: $\lim_{x \searrow 0} x^x$

A4: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(2x)}$

A5: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{3}{x^2}}$

A6: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right)$

A7: Sind $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ so gilt:

$$\lim_{x \searrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{ab}$$

A8: Zeige, dass die Umkehrung des Satzes von de l'Hospital i.A. falsch ist, indem du für $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) := x + \sin(x), \quad g(x) := x$$

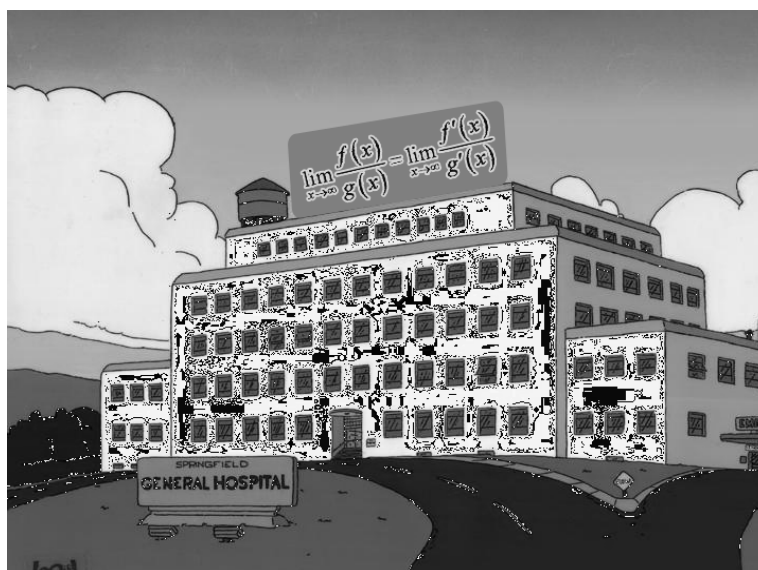
die Ausdrücke

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

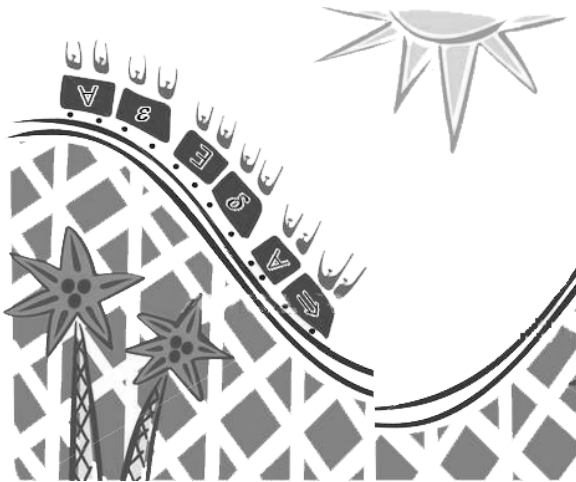
berechnest.

A9: Zeige, dass für $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = \exp(x)$$



Aufgabenblatt 3: Stetigkeit und Zwischenwertsatz



A1 Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$.
Zeige, dass dann $f \equiv g$.

A2 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $a \in \mathbb{R}$ und $f(a) > 0$.
Zeige: Es gibt ein $\delta > 0$, sodass $f|_{B_\delta(a)} > 0$.

A3 Bestimme den Grenzwert von $\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$
für $x \rightarrow \infty$.

A4 Weise nach, dass die folgende Funktion eine Nullstelle besitzt:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := e^x + xe^{-x}$$

A5 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und es gelte

$$f(a)f(b) < 0$$

Zeige: $\exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = 0$.

A6 Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit

$$g(a) = f(b) \text{ und } g(b) = f(a)$$

Zeige: $\exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = g(\xi)$

A7 Sei $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ stetig. Zeige: $\exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = \xi$

A8 Jedes reelle Polynom ungeraden Grades hat eine Nullstelle.

A9 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und in $]a, b[$ zwei mal stetig differenzierbare Funktion mit 3 verschiedenen Nullstellen. Dann hat f'' auch noch eine Nullstelle in $]a, b[$.

A10 Eine stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig.

A11 Zeige für $x, y \in \mathbb{R}$

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$$

Aufgabenblatt 4: Funktionenfolgen

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge. Untersuche, ob f_n punktweise bzw. gleichmäßig gegen ein $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert und finde dieses f für

A1 $D := \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{n}{n^2 + x^2}$

A2 $D := [0, 1]$, $f_n(x) := \frac{nx}{1 + nx^2}$

A3 $D := [-1, 1]$, $f_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$

A4 $D := [0, 1]$, $f_n(x) := x^n$

A5 $D := [0, 1]$, $f_n(x) := \begin{cases} nx & , x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 2 - nx & , x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & , x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$

A6 Seien (f_n) , (g_n) Folgen beschränkter Funktionen auf D , die gleichmäßig gegen ein f bzw. g konvergieren. Zeige: $f_n \cdot g_n$ konvergiert gleichmäßig gegen $f \cdot g$.

A7 Es sei (f_n) eine gleichmäßig gegen f konvergente Funktionenfolge. Es gebe ein $a > 0$, sodass

$$\forall x \in D : |f_n(x)| \geq a$$

Dann konvergiert $\frac{1}{f_n}$ gleichmäßig gegen $\frac{1}{f}$.

