LAGRANGE-FORMALISMUS FÜR FELDGLEICHUNGEN

NIKOLAI NOWACZYK AND JAN-HENDRIK TREUDE

1. Lagrange Formalismus für Schnitte von Vektorbündel

1.1. Faser-Ableitung. Sei $E \to M$ ein Vektorbündel und $L : E \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann definieren wir die *Faser-Ableitung* $\mathbb{F}L : E \to E^*$ durch

$$(\mathbb{F}_v L)(w) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} L(v + tw) \tag{1.1}$$

für $v, w \in E_p$ in einer *gemeinsamen Faser*. Man beachte, dass die rechte Seite von (1.1) in der Tat nur Sinn macht, wenn v und w in einer gemeinsamen Faser sitzen.

Indem man alles in lokalen Koordinaten ausschreibt, sieht man leicht, dass in der Tat $\mathbb{F}_v L \in E_p^*$ und dass $\mathbb{F}L$ glatt ist. Des weiteren gilt folgende lokale Formel: Seien $x^1, \ldots, x^n$ lokale Koordinaten auf $U \subset M$, sei $e_1, \ldots, e_m$ ein lokaler Rahmen für $E|_U$ und sei $e^1, \ldots, e^m$ der duale Rahmen für $E^*|_U$. Betrachtet man wie üblich $x^1, \ldots, x^n, e^1, \ldots, e^m$ als Koordinaten für $E|_U$, so gilt für $v \in E_p$

$$\mathbb{F}_v L = \sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial e^i}\Big|_{v_p} e^i\big|_p \,. \tag{1.2}$$

Dies lässt sich relativ leicht nachrechnen und ist auch anschaulich klar, da wir ja L nur in Richtung der Faser abgeleitet haben.

Sei schließlich $\phi \in \Gamma^\infty(E)$ ein glatter Schnitt. Dann erhalten wir einen weiteren glatten Schnitt $\mathbb{F}_\phi L \in \Gamma^\infty(E^*)$ durch $(\mathbb{F}_\phi L)|_p = \mathbb{F}_{\phi|_p} L$. In der Tat folgt aus der Glattheit von $\mathbb{F}L$ und von ϕ sofort, dass auch auch $\mathbb{F}_\phi L$ wieder glatt ist. Insbesondere wird für zwei glatte Schnitte $\phi, \psi \in \Gamma^\infty(E)$ eine glatte Funktion $(\mathbb{F}_\phi L)(\psi)$ auf M definiert durch

$$M \ni p \longmapsto (\mathbb{F}_{\phi|_p} L)(\psi|_p) \in \mathbb{R}\,.$$

1.2. Erste Ordnungs Lagrange-Funktionen und Wirkungen. Sei $E \to M$ ein Vektorbündel und sei ∇^E ein Zusammenhang auf E. Unser Ziel ist es, zweite Ordnungs Differentialgleichungen für Schnitte von E als sogenannte Euler-Lagrange Gleichungen zu gewissen "Wirkungsprinzipien" zu erhalten, d.h. wir möchten Lösungen von Differentialgleichungen als Extremalpunkte gewisser Funktionale charakterisieren. Um Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu erhalten, dürfen die Funktionale nur von einem Schnitt und dessen erster kovarianter Ableitung abhängen. Dies führt zu sogenannten erster Ordunungs Langrange Funktionen, die wir im Folgenden besprechen.

Sei $\phi \in \Gamma^\infty(E)$ ein glatter Schnitt und $\nabla^E\phi$ seine kovariante Ableitung. Diese ist dann ein Schnitt $\nabla^E\phi \in \Gamma^\infty(\mathsf{End}(TM; E))$ gemäß

$$\Gamma^\infty(TM) \ni X \longmapsto \nabla^E_X \phi \in \Gamma^\infty(E)\,.$$

Die Eigenschaften einer kovarianten Ableitung implizieren, dass dies in der Tat $\mathcal{C}^\infty(M)$-linear ist, also einen Schnitt von $\mathsf{End}(TM; E)$ definiert. Nun gilt $\mathsf{End}(TM; E) \cong T^*M \otimes E$ wie das

Date: June 28, 2013.

aus der linearen Algebra bekannt ist und wir wollen im Folgenden stets $\nabla^E\phi$ also Schnitt von $T^*M \otimes E$ auffassen.

Ein *erste Ordnungs Lagrange-Funktion* auf E ist nun ein glatte Funktion $L : E \times (T^*M \otimes E) \to \mathbb{R}$. Daraus erhält man ein Funktional auf den Schnitten von E wie folgt: Sei $\phi \in \Gamma^\infty(E)$ ein glatter Schnitt und $\nabla^E\phi \in \Gamma^\infty(T^*M \otimes E)$ seine kovariante Ableitung. Dann wird durch

$$M \ni x \longmapsto L\left(\phi|_x, (\nabla^E\phi)|_x\right) \in \mathbb{R}$$

eine glatte Funktion auf M definiert, die wir mit $L(\phi, \nabla^E\phi)$ bezeichnen. Diese kann man nun über die Raumzeit (M, g) integrieren, was das zu S gehörige *Wirkungsfunktional* $S : \Gamma^\infty(E) \to \mathbb{R}$ definiert, also durch

$$S[\phi] := \int_M L(\phi, \nabla^E\phi)\, \mathrm{d}\mu_g\,, \tag{1.3}$$

wobei $\mathrm{d}\mu_g$ die von g induzierte Volumenform bezeichnet.

Genauer sollte man beachten, dass das Integral (1.3) meist nicht wohldefiniert ist, es sei denn ϕ hat kompakten Träger. Da dies keine sehr sinnvolle Forderung ist (man beachte, dass dies auch kompakten Träger in der Zeit bedeuten würde) kann man alternativ auch lokale Wirkungen $S[\phi, K] = \int_K L(\phi, \nabla^E\phi)\, \mathrm{d}\mu_g$ über kompakten Teilmengen $K \subset M$ betrachten. Da wir im Folgenden nur an kompakt getragenen Variationen eines gegebenen Schnittes ϕ interessiert sind, spielt dies aber alles keine so große Rolle.

1.3. **Variationen der Wirkung.** Sei nun $\phi \in \Gamma^\infty(E)$ ein glatter Schnitt von E und sei $\psi \in \Gamma_c^\infty(E)$ ein glatter Schnitt mit kompaktem Träger. Dann ist $\phi_t := \phi + t\psi \in \Gamma^\infty(E)$ eine sogenannte *Variation* von ϕ.[1] Da für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Schnitte ϕ_t und ϕ außerhalb von $\operatorname{supp}\psi$ übereinstimmen, hat die Funktion

$$L(\phi_t, \nabla^E\phi_t) - L(\phi, \nabla^E\phi)$$

ebenfalls kompakten Träger (denselben wie ψ). Insbesondere können wir sie also problemlos über M integrieren. Des weiteren überlegt man sich, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} L(\phi + t\psi, \nabla^E\phi + t\nabla^E\psi) = \left(\mathbb{F}_\phi L(\cdot, \nabla^E\phi)\right)(\psi) + \left(\mathbb{F}_{\nabla^E\phi} L(\phi, \cdot)\right)(\nabla^E\psi)\,. \tag{1.4}$$

Hier bezeichnet $\mathbb{F}$ die Faserableitung aus Abschnitt 1.1, die einmal auf $L(\cdot, \nabla^E\phi) : E \to \mathbb{R}$ und einmal auf $L(\phi, \cdot) : T^*M \otimes E \to \mathbb{R}$ angewendet wird. Offensichtlich hat auch diese Ableitung wieder kompakten Träger, nämlich höchstens so groß wie der von ψ. Schließlich überlegt man sich, dass folgende Rechnung gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} S[\phi + t\psi] &= \lim_{t\to 0} \frac{S[\phi + t\psi] - S[\phi]}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \int_M \frac{L(\phi + t\psi, \nabla^E\phi + t\nabla^E\psi) - L(\phi, \nabla^E\phi)}{t}\, \mathrm{d}\mu_g \\
&= \int_M \lim_{t\to 0} \frac{L(\phi + t\psi, \nabla^E\phi + t\nabla^E\psi) - L(\phi, \nabla^E\phi)}{t}\, \mathrm{d}\mu_g \\
&\overset{(1.4)}{=} \int_M \left(\mathbb{F}_\phi L(\cdot, \nabla^E\phi)\right)(\psi) + \left(\mathbb{F}_{\nabla^E\phi} L(\phi, \cdot)\right)(\nabla^E\psi)\, \mathrm{d}\mu_g\,.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

[1] An dieser Stelle ist es essentiell, dass E ein Vektorbündel ist, da wir ansonsten solch eine Summe nicht bilden können

Insbesondere ist also $S[\phi + t\psi]$ in $t = 0$ differenzierbar. Wir sagen nun, ϕ sei ein *stationärer Punkt* von S, falls für jedes $\psi \in \Gamma_c^\infty(E)$ diese Ableitung verschwindet, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} S[\phi + t\psi] = 0 \qquad \forall\, \psi \in \Gamma_c^\infty(E)\,. \tag{1.6}$$

1.4. **Euler-Lagrange-Gleichungen.** Das nächste Ziel ist es, stationäre Punkte einer Wirkung S, die durch eine erste Ordnungs Lagrange-Funktion gegeben ist, durch Differentialgleichungen zu charakterisieren. Dazu benötigen wir folgendes kleine Lemma.

Lemma 1.1. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $E \to M$ ein Vektorbündel. Sei ∇^{TM} ein Zusammenhang für TM und ∇^E ein Zusammenhang für E. Es bezeichne ∇ den induzierten Zusammenhang auf $TM \otimes E^*$. Sei $A \in \Gamma^\infty(TM \otimes E^*)$, $\phi \in \Gamma^\infty(E)$ und $A\phi \in \Gamma^\infty(TM)$ das durch Kontraktion gewonnene Vektorfeld. Dann gilt*

$$\operatorname{div}(A\phi) = \operatorname{div}(A)(\phi) + A(\nabla^E \phi)\,. \tag{1.7}$$

Hierbeit ist $\operatorname{div}(A) \in \Gamma^\infty(E^*)$ *lokal definiert durch*

$$\operatorname{div}(A)(\phi) = \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} A)(e^i \otimes \phi)\,, \tag{1.8}$$

wobei $e_1, \ldots, e_n$ ein beliebiger lokaler Rahmen für TM und $e^1, \ldots, e^n$ der dazu duale Rahmen für T^*M ist.

Proof. Das ist eine einfache Rechnung:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(A\phi) &= \sum_{i=1}^n e^i(\nabla_{e_i}^{TM}(A\phi)) = \sum_{i=1}^n e^i\left((\nabla_{e_i} A)(\phi) + A(\nabla_{e_i}^E \phi)\right) \\
&= \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} A)(e^i \otimes \phi) + \sum_{i=1}^n A(e^i \otimes \nabla_{e_i}^E \phi) \\
&= \operatorname{div}(A)(\phi) + A\left(\sum_{i=1}^n e^i \otimes \nabla_{e_i}^E \phi\right) \\
&= \operatorname{div}(A)(\phi) + A(\nabla^E \phi)\,.
\end{aligned}$$

□

Wir werden dieses Lemma gleich auf $A = \mathbb{F}_{\nabla\phi} L$ anwenden, was ja in der Tat ein Schnitt von $(T^*M \otimes E)^* \cong TM \otimes E^*$ ist. Hier und im Folgenden schreiben wir abkürzend $\mathbb{F}_\phi L$ für $\mathbb{F}_\phi L(\cdot, \nabla^E \phi)$ und $\mathbb{F}_{\nabla^E\phi} L$ für $\mathbb{F}_{\nabla^E\phi} L(\phi, \cdot)$. In der Tat wird ja schon aus dem Subskript klar, wonach abgeleitet wird.

Theorem 1.2. (Euler-Lagrange Gleichungen) *Sei (M, g) eine orientierte semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei ∇^{TM} der Levi-Civita Zusammenhang und sei $\mathrm{d}\mu_g$ die von g induzierte Volumenform. Sei $E \to M$ ein Vektorbündel und ∇^E ein Zusammenhang darauf. Schließlich sei $L : E \times (T^*M \otimes E) \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann gilt: Ein Schnitt $\phi \in \Gamma^\infty(E)$ ist genau dann ein stationärer Punkt der zu L gehörigen Wirkung, d.h. erfüllt* (1.6)*, wenn er die folgende Gleichung erfüllt:*

$$\boxed{\mathbb{F}_\phi L - \operatorname{div}(\mathbb{F}_{\nabla\phi} L) = 0} \tag{1.9}$$

Diese Gleichung heißt Euler-Lagrange Gleichung *der Lagrange-Funktion L bzw. der Wirkung S.*

Proof. Die entscheidende Formel ist (1.5), die einen Zusammenhang zwischen der Ableitung der Wirkung und der Faserableitung der Lagrange-Funktion herstellt. Diese formen wir nun mit Hilfe des vorherigen Lemmas 1.1 um. Für ein $\psi \in \Gamma_c^\infty(E)$ mit kompaktem Träger hat natürlich das Vektorfeld $\mathbb{F}_{\nabla\phi}(\psi) \in \Gamma_c^\infty(TM)$ ebenfalls kompakten Träger. Folglich gilt nach dem Satz von Gauß (siehe Anhang A) und der Divergenz-Identität (1.7) aus dem vorherigen Lemma, dass

$$0 = \int_M \operatorname{div}\left((\mathbb{F}_{\nabla\phi}L)(\psi)\right) \mathrm{d}\mu_g = \int_M \operatorname{div}\left(\mathbb{F}_{\nabla\phi}L\right)(\psi)\, \mathrm{d}\mu_g + \int_M (\mathbb{F}_{\nabla\phi}L)(\nabla^E\psi)\,.$$

Wenn wir dies in (1.5) einsetzen, erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} S[\phi + t\psi] = \int_M \big(\mathbb{F}_\phi L - \operatorname{div}(\mathbb{F}_{\nabla^E\phi}L)\big)(\psi)\, \mathrm{d}\mu_g\,.$$

Nun überlegt man sich leicht, dass dies genau dann für alle $\psi \in \Gamma_c^\infty(E)$ verschwindet, wenn schon der Ausdruck $\mathbb{F}_\phi L - \operatorname{div}(\mathbb{F}_{\nabla^E\phi}L)$ überall verschwindet. In der Tat ist die eine Richtung klar und die andere kann man sich in lokalen Koordinaten überlegen. $\square$

2. Die Skalare Wellengleichung

2.1. **Erinnerung an** grad**,** div**,** $\square$**.** Sei (M, g) eine Lorentz-Mannigfaltigkeit. Dann induziert g einige natürliche Differentialoperatoren auf M, von denen wir nun einige kurz wiederholen.

Zunächst ist für eine glatte Funktion $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ der *Gradient* $\operatorname{grad}\phi \in \Gamma^\infty(TM)$ ein Vektorfeld, das durch $\operatorname{grad}\phi = (\mathrm{d}\phi)^\sharp$ definiert ist, also durch die Gleichung

$$(\mathrm{d}\phi)(X) =: g(\operatorname{grad}\phi, X) \qquad \forall\, X \in \Gamma^\infty(TM)\,. \tag{2.1}$$

Lokal gelten die beiden Darstellungsformeln

$$\operatorname{grad}\phi = g^{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{grad}\phi = \sum_{i=0}^n \epsilon_i(\mathrm{d}\phi)(e_i)e_i\,, \tag{2.2}$$

wobei $x^0, \dots, x^n$ lokale Koordinaten, $e_0, \dots, e_n$ ein lokaler Orthonormalrahmen und wie üblich $\epsilon_i = g(e_i, e_i) = \pm 1$ ist.

Als nächstes ist für ein Vektorfeld $X \in \Gamma^\infty(TM)$ die *Divergenz* $\operatorname{div}(X) \in \mathcal{C}^\infty(M)$ eine glatte Funktion, welche durch

$$\operatorname{div}(X) := \mathsf{tr}(Y \mapsto \nabla_Y X) \tag{2.3}$$

definiert ist. Lokal lässt sich die Divergenz schreiben als

$$\operatorname{div}(X) = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\alpha} + X^\alpha\Gamma^\beta_{\beta\alpha} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{div}(X) = \sum_{i=0}^n \epsilon_i g(e_i, \nabla_{e_i}X)\,, \tag{2.4}$$

wo wiederum $e_0, \dots, e_n$ ein lokaler Orthonormalrahmen und $x^0, \dots, x^n$ lokale Koordinaten mit zugehörigen Christoffel-Symbolen $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ sind.

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen der Divergenz und dem Volumenelement. Genauer gilt nämlich folgendes Lemma.

Lemma 2.1. *Sei (M, g) eine orientierte semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und Ω_g die von g induzierte Volumenform. Dann gilt für jedes $X \in \Gamma^\infty(TM)$ die Formel*

$$\mathscr{L}_X\,\Omega_g = \operatorname{div}(X) \cdot \Omega_g\,. \tag{2.5}$$

Proof. Der Beweis besteht in einfachem Nachrechnen. Seien $x^1, \ldots, x^n$ lokale Koordinaten, dann gilt $\Omega_g = \sqrt{|g|}\,\mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n$, wo wir zur Abkürzung $|g|$ für $|\det(g_{ij})|$ geschrieben haben. Wir setzen weiter $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Mit der üblichen Leibniz-Regel für die Lie-Ableitung folgt einerseits

$$
\begin{aligned}
(\mathscr{L}_X \Omega_g)(\partial_1, \ldots, \partial_n) &= X(\Omega_g(\partial_1, \ldots, \partial_n)) - \sum_{i=1}^n \Omega_g(\partial_1, \ldots, \underbrace{\mathscr{L}_X \partial_i}_{= -\sum_{j=1}^n \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \partial_j}, \ldots, \partial_n) \\
&= X(\sqrt{|g|}) + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \underbrace{\Omega_g(\partial_1, \ldots, \overbrace{\partial_j}^{i\text{-th position}}, \ldots, \partial_n)}_{=\delta_{ij}\sqrt{|g|}} \\
&= X(\sqrt{|g|}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial X^i}{\partial x^i} \sqrt{|g|} \\
&\overset{(2.4)}{=} X(\sqrt{|g|}) + \operatorname{div}(X)\sqrt{|g|} - \sum_{i,j=1}^n X^i \Gamma^j_{ji} \sqrt{|g|}\,. \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Andererseits gilt wegen $\nabla \Omega_g = 0$

$$
\begin{aligned}
0 &= (\nabla_X \Omega_g)(\partial_1, \ldots, \partial_n) \\
&= X(\Omega_g(\partial_1, \ldots, \partial_n)) - \sum_{i=1}^n \Omega_g(\partial_1, \ldots, \underbrace{\nabla_X \partial_i}_{=\sum_{j,k=1}^n X^j \Gamma^k_{ji} \partial_k}, \ldots, \partial_n) \\
&= X(\sqrt{|g|}) - \sum_{i,j,k=1}^n X^j \Gamma^k_{ji} \underbrace{\Omega_g(\partial_1, \ldots, \overbrace{\partial_k}^{i\text{-th position}}, \ldots, \partial_n)}_{=\delta_{ik}\sqrt{|g|}} \\
&= X(\sqrt{|g|}) - \sum_{i,j=1}^n X^j \Gamma^i_{ji} \sqrt{|g|}\,.
\end{aligned}
$$

Setzen wir dies in $(*)$ ein, so folgt

$$
(\mathscr{L}_X \Omega_g)(\partial_1, \ldots, \partial_n) = \operatorname{div}(X) \cdot \sqrt{|g|} = \operatorname{div}(X) \cdot \Omega_g(\partial_1, \ldots, \partial_n)\,.
$$

Da das Bündel der n-Formen 1-dimensionale Fasern hat, folgt daraus schon $\mathscr{L}_X \Omega_g = \operatorname{div}(X) \cdot \Omega_g$ wie behauptet. □

Aus diesem Lemma folgt außerdem noch eine weitere nützliche lokale Formel für die Divergenz. Seien $x^1, \ldots, x^n$ lokale Koordinaten. Dann gilt nach (2.5) und Formel $(*)$ aus dem vorherigen Beweis die Beziehung

$$
\operatorname{div}(X) \cdot \sqrt{|g|} = \operatorname{div}(X) \cdot \Omega_g(\partial_1, \ldots, \partial_n) \overset{(2.5)}{=} (\mathscr{L}_X \Omega_g)(\partial_1, \ldots, \partial_n) \overset{(*)}{=} X(\sqrt{|g|}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial X^i}{\partial x^i} \sqrt{|g|}\,.
$$

Division durch $\sqrt{|g|}$ und eine kurze Rückwärts-Anwendung der Leibniz-Regel liefert die Gleichung

$$\operatorname{div}(X) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{|g|}\, X^i \right) . \tag{2.6}$$

Schließlich setzt man für eine glatte Funktion $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M)$

$$\Box\, \phi := \operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) \tag{2.7}$$

und nennt $\Box$ den *d'Alembert Operator* oder auch *Wellenoperator*. Indem man die lokalen Formeln (2.2) und (2.6) für den Gradienten und die Divergenz benutzt, erhält man unmittelbar die wohl bekannteste lokale Formel für den Wellenoperator:

$$\Box\, \phi = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij}\, \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \right) . \tag{2.8}$$

Aus den alternativen lokalen Darstellungsformeln für den Gradienten und die Divergenz, die wir oben angesammelt haben, erhält man weitere lokale Formeln für den Wellenoperator. Wir werden diese allerdings nicht benötigen.

2.2. **Die skalare Wellengleichung.** Sei (M, g) eine Lorentz-Mannigfaltigkeit. Dann lautet die *skalare Wellengleichung* für eine Funktion $\phi : M \to \mathbb{R}$ im Potential $V \in \mathcal{C}^\infty(M)$

$$\Box\, \phi = V \cdot \phi \,, \tag{2.9}$$

wobei $\Box$ der von g induzierte *d'Alembert Operator* oder *Wellenoperator* ist. Ein Spezialfall ist die *Klein-Gordon Gleichung*, für die man $V = m$ setzt für $m \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Allerdings wird diese dann nicht als Potential interpretiert, sondern als Masse, weshalb gewöhnlich $m > 0$ angenommen wird.

2.3. **Lagrange-Formalismus für die Wellengleichung.** Unser Ziel ist es nun, die Wellengleichung (2.9) als Euler-Lagrange-Gleichung eines geeigneten Funktionals darzustellen. Um den Formalismus aus Abschnitt 1 verwendung zu können, müssen wir zunächst die Funktionen, die man in die Wellengleichung einsetzt, als Schnitte eines Vektorbündels auffassen, auf diesem Bündel einen geeigneten Zusammenhang einführen und schließlich eine geeignete Lagrange-Funktion suchen.

Glatte Funktion $\phi : M \to \mathbb{R}$ lassen sich auffassen als glatte Schnitte des trivialen Vektorbündels $E = M \times \mathbb{R}$. Des weiteren gibt es auf diesem trivialen Bündel einen kanonischen Zusammenhang, nämlich einfach die äußere Ableitung. Man prüft in der Tat leicht nach, dass durch

$$\nabla^E_X \phi := \mathrm{d}\phi(X) = X(\phi) \tag{2.10}$$

ein Zusammenhang definiert wird. Diesen werden wir verwenden.

Man beachte, dass $T^*M \otimes E \cong T^*M$, da ja $E_p = \mathbb{R}$ für jedes $p \in M$.[2] Deshalb ist die gesuchte Lagrange-Funktion eine Abbildung $L : E \times T^*M \to \mathbb{R}$. Wir behaupten, dass die Wahl

$$L(a, \omega) = |\omega|^2_{g^{-1}} + V(p) \cdot a^2 \tag{2.11}$$

für $a \in E_p$ und $\omega \in T^*_q M$ zur Wellengleichung (2.9) mit Potential $V \in \mathcal{C}^\infty(M)$ führt. Hierbei bezeichnet g^{-1} die von g induzierte Metrik auf T^*M. Um unsere Behauptung zu überprüfen,

[2] Der Isomorphismus ist einfach gegeben durch $\omega \otimes a \mapsto a \cdot \omega$ für $\omega \in T^*_p M$ und $a \in E_p = \mathbb{R}$.

müssen wir die Faserableitungen von L ausrechnen. Für die Faser-Ableitung in E-Richtung finden wir für $a, b \in E_p$ und $\omega \in T_q^*M$

$$(\mathbb{F}_a L(\cdot,\omega))(b) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} L(a+tb,\omega) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \Big(|\omega|^2_{g^{-1}} + V(p)\cdot(a+tb)^2\Big) = 2V(p)\cdot a\cdot b\,. \quad (*)$$

Für die Faserableitung in T^*M-Richtung finden wir für $a \in E_p$ und $\omega, \eta \in T_q^*M$

$$\begin{aligned}(\mathbb{F}_\omega L(a,\cdot))(\eta) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} L(a,\omega+t\eta)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \Big(|\omega+t\eta|^2_{g^{-1}} + V(p)\cdot a\Big)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \Big(g(\omega^\sharp+t\eta^\sharp,\omega^\sharp+t\eta^\sharp) + V(p)\cdot a\Big)\\ &= 2g(\omega^\sharp,\eta^\sharp) = 2\omega^\sharp(\eta)\,. \end{aligned} \quad (**)$$

Seien nun $\phi, \psi \in \Gamma^\infty(E)$ glatte Schnitte (also eine glatte Funktionen auf M). Dann gilt also

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbb{F}_{\mathrm{d}\phi}L)(\psi) &\overset{(1.8)}{=} \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i}\mathbb{F}_{\mathrm{d}\phi})\,(\underbrace{e^i\otimes\psi}_{=\psi\cdot e^i})\\ &\overset{(**)}{=} 2\psi\sum_{i=1}^n(\nabla_{e_i}(\mathrm{d}\phi)^\sharp)(e^i)\\ &= 2\psi\sum_{i=1}^n e^i(\nabla_{e_i}\operatorname{grad}\phi)\\ &= 2\psi\operatorname{div}(\operatorname{grad}\phi) = 2\psi\,\Box\,\phi\,.\end{aligned}$$

Also folgt $\operatorname{div}(\mathbb{F}_{\mathrm{d}\phi}L) = 2\,\Box\,\phi$. Aus $(*)$ folgt außerdem, dass $\mathbb{F}_\phi L = 2V\cdot\phi$. Also lauten die Euler-Lagrange-Gleichung des zu L gehörigen Funktionals

$$0 \overset{!}{=} \mathbb{F}_\phi L - \operatorname{div}(\mathbb{F}_{\mathrm{d}\phi}L) = 2V\cdot\phi - 2\,\Box\,\phi\,, \tag{2.12}$$

was in der Tat genau die Wellengleichung (2.9) mit Potential V ist.

3. Die Maxwell-Gleichungen

3.1. **Der Hodge-Stern Operator.** Sei (M,g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wie bekannt sein dürfte, induziert die semi-Riemannsche Metrik g auf TM eine semi-Riemannsche Metrik gleicher Signatur auf T^*M, die für gewöhnlich mit g^{-1} bezeichnet wird. Nun kann man weiter ein Skalarprodukt auf den äußeren Potenzen $\Lambda^k T^*M$ einführen wie folgt: Für einfache äußere Produkte $\alpha = \alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_k$ und $\beta = \beta_1\wedge\ldots\wedge\beta_k$ setzt man zunächst

$$\langle\alpha,\beta\rangle_{\Lambda^kT^*M} := \det\begin{pmatrix} g^{-1}(\alpha_1,\beta_1) & \cdots & g^{-1}(\alpha_1,\beta_k)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ g^{-1}(\alpha_k,\beta_1) & \cdots & g^{-1}(\alpha_k,\beta_k)\end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Aufgrund der Antisymmetrie der Determinante unter Permutation von Zeilen und Spalten ist dies tatsächlich wohldefiniert, d.h. die rechte Seite hat die richtige Symmetrie unter Permutation der α_i und β_j. Anschließend setzt man $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Lambda^kT^*M}$ bilinear auf ganz Λ^kT^*M fort und prüft nach, dass dies in der Tat ein Skalarprodukt definiert, d.h. eine nicht ausgeartete, symmetrische Bilinearform. Allerdings hat diese nun eine andere Signatur als g.

Sei nun (M, g) zusätzlich orientiert und sei Ω_g die von g induzierte Volumenform. Dann ist Ω_g insbesondere an jedem Punkt $p \in M$ eine Basis des 1-dimensionalen Vektorraums $\Lambda^n T_p^* M$. Sei nun $\alpha \in \Lambda^k T_p^* M$ gegeben. Dann gibt es zu jedem $\beta \in \Lambda^{n-k} T^* M$ eine eindeutige Zahl $\ell_\alpha(\beta) \in \mathbb{R}$, sodass

$$\alpha \wedge \beta = \ell_\alpha(\beta) \cdot \Omega_g|_p \,. \tag{3.2}$$

Da die linke Seite linear in β ist, muss die Abbildung $\ell_\alpha : \Lambda^{n-k} T_p^* M \to \mathbb{R}$ ebenfalls linear sein. Dieses lineare Funktional können wir mittels des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Lambda^{n-k} T^* M}$ darstellen, d.h. es gibt ein eindeutiges Element $\star\alpha \in \Lambda^k T_p^* M$, sodass

$$\ell_\alpha(\beta) = \langle \star\alpha, \beta \rangle_{\Lambda^{n-k} T_p^* M} \qquad \forall \beta \in \Lambda^{n-k} T_p^* M \,.$$

Da die linke Seite von (3.2) auch linear in α ist, folgt, dass die Abbildung $\star : \Lambda^k T_p^* M \to \Lambda_p^{n-k} M$, $\alpha \mapsto \star\alpha$ linear ist. Dies kan man für jedes $k = 0, \ldots, n$ tun und erhält so eine linear Abbildung $\star : \Lambda T^* M \to \Lambda T^* M$ auf der äußeren Algebra $\Lambda T^* M = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k T^* M$. Man nennt diese Abbildung den *Hodge-Stern Operator*. Sie ist eindeutig festgelegt durch die Gleichung

$$\alpha \wedge \beta = \langle \star\alpha, \beta \rangle_{\Lambda^{n-k} T_p^* M} \cdot \Omega_g|_p \qquad \forall \alpha \in \Lambda^k T^* M, \beta \in \Lambda^{n-k} T^* M \,. \tag{3.3}$$

3.2. **Die Maxwell-Gleichungen.**

Definition 3.1. Sei (M, g) eine orientierte Lorentzmannigfaltigkeit. Dann lauten die *Maxwell-Gleichungen im Vakuum* für eine 2-Form $F \in \Omega^2(M)$

$$\mathrm{d}F = 0 \,, \quad \star\, \mathrm{d}\star F = 0 \,, \tag{3.4}$$

wobei $\star$ der Hodge-Stern-Operator ist.[3]

Die Maxwell-Gleichungen passen erstmal nicht unmittelbar in den Rahmen von Abschnitt 1, da sie mittels der äußeren Ableitung d und nicht mittels eines Zusammenhangs definiert sind. Das ist jedoch kein Problem, da sich die äußere Ableitung stets durch Antisymmetrisierung eines beliebigen (torsionsfreien?) Zusammenhangs darstellen lässt. Konkreter sei ∇ ein beliebiger (torsionsfreier) Zusammenhang auf $\Lambda^k T^* M$, z.B. der Levi-Civita Zusammenhang. Dann ist es nicht schwer, nachzuprüfen, dass für jedes $\omega \in \Omega^k(M)$ und Vektorfelder $X_0, \ldots, X_k$ gilt

$$(\mathrm{d}\omega)(X_0, \ldots, X_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i (\nabla_{X_i} \omega)(X_0, \ldots \widehat{X_i} \ldots, X_k) \,, \tag{3.5}$$

wo der Hut wie üblich das Auslassen dieses Eintrags bedeutet. Wir werden auch im Folgenden ausschließlich mit der äußeren Ableitung arbeiten.

Wir nehmen im Folgenden an, dass M einfach zusammenhängend ist. Dann besagt die erste Maxwell-Gleichung ($\mathrm{d}F = 0$) genau, dass es eine 1-Form $A \in \Omega^1(M)$ gibt mit $F = \mathrm{d}A$. Wir nehmen also das Potential A als die fundamental Größe im Folgenden, dann lautet die übrig gebliebene Gleichung $\star\, \mathrm{d}\star \mathrm{d}A = 0$. Diese wollen wir nun als Euler-Lagrange-Gleichungen eines geeigneten Funktionals erkennen.

Proposition 3.2. *$A \in \Omega^1(M)$ erfüllt genau dann die Maxwell-Gleichung $\star\, \mathrm{d}\star \mathrm{d}A = 0$ wenn sie ein stationärer Punkt der zur Lagrangefunktion $L(A, \mathrm{d}A) = |\,\mathrm{d}A|_g^2$ gehörigen Wirkung ist.*

[3] Der zweite Hodge-Stern in der zweiten Gleichung erscheint zunächst überflüssig. Er ist allerdings notwendig wenn man zusätzliche Ladungen hat, da dann die zweite Maxwell-Gleichung zu $\star\, \mathrm{d}\star F = j$ abgeändert werden muss, wo j die Stromdichte ist, eine 1-Form.

Proof. Ausnahmsweise verwenden wir hier nicht die allgemeinen Euler-Lagrange-Gleichungen (1.9), sondern leiten das Funktional nochmals explizit ab. Dies ist hier leichter. Sei also $B \in \Omega^1_c(M)$ eine beliebige 1-Form mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} S[A+tB] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \int_M \langle \mathrm{d}A + t\,\mathrm{d}B, \mathrm{d}A + t\,\mathrm{d}B\rangle\,\Omega_g \\
&= 2\int_M \langle \mathrm{d}A, \mathrm{d}B\rangle\,\Omega_g \\
&\overset{(1)}{=} -2\int_M \langle \star(\star\,\mathrm{d}A), \mathrm{d}B\rangle\,\Omega_g \\
&= -2\int_M \underbrace{\star\,\mathrm{d}A \wedge \mathrm{d}B}_{=\mathrm{d}(\star\,\mathrm{d}A\wedge B)-(\mathrm{d}\star\mathrm{d}A)\wedge B} \\
&\overset{(2)}{=} 2\int_M (\mathrm{d}\star\mathrm{d}A)\wedge B \\
&= 2\int_M \langle \star\,\mathrm{d}\star\mathrm{d}A, B\rangle\,\Omega_g\,.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir in (1) verwendet, dass $\star^2 = -\,\mathsf{id}$ auf 2-Formen für Metriken der Signatur $(1,3)$, und in (2) haben wir den Satz von Stokes verwendet. □

Appendix A. Der Satz von Stokes und der Satz von Gauss

Wir setzen den Satz von Stokes voraus, d.h.

$$\int_\Omega \mathrm{d}\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$$

für jedes berandete Gebiet $\Omega \subset M$ mit Rand $\partial\Omega$ und jede $(n-1)$-Form ω. Daraus wollen wir den Satz von Gauß ableiten: Ist (M,g) semi-Riemannsch, $\Omega \subset M$ ein berandetes Gebiet, dessen Rand $\partial\Omega \subset M$ eine nichtausgeartete Hyperfläche ist, so gilt für jedes Vektorfeld $X \in \Gamma^\infty(TM)$:

$$\int_\Omega \operatorname{div} X\,\mathrm{d}\mu_g = \int_{\partial\Omega} \langle \nu,\nu\rangle\,\langle X,\nu\rangle\,\mathrm{d}S\,,$$

wobei ν die äußere Normale auf $\partial\Omega$ ist und $\mathrm{d}S = \iota_\nu\,\mathrm{d}\mu_g$ die induzierte Oberflächenform. In der Tat, mit der Cartan-Formel ($\mathrm{d}\mathrm{d}\mu_g = 0$, da $\mathrm{d}\mu_g$ eine n-Form ist)

$$\operatorname{div} X\,\mathrm{d}\mu_g = \mathscr{L}_X\,\mathrm{d}\mu_g = (\iota_x \circ \mathrm{d} + \mathrm{d}\circ\iota_X)\,\mathrm{d}\mu_g = \mathrm{d}(\iota_X\,\mathrm{d}\mu_g)$$

und der Zerlegung $X = \langle \nu,\nu\rangle\,\langle X,\nu\rangle\,\nu + X^{||}$ mit $X^{||} \in T\partial\Omega$, folgt aus Stokes sofort:

$$\int_\Omega \operatorname{div} X\,\mathrm{d}\mu_g = \int_\Omega \mathrm{d}(\iota_X\,\mathrm{d}\mu_g) = \int_{\partial\Omega} \iota_X\,\mathrm{d}\mu_g = \int_{\partial\Omega} \langle \nu,\nu\rangle\,\langle X,\nu\rangle\,\mathrm{d}S\,.$$

Hierbei haben wir benutzt, dass $\iota_{X^{||}}\,\mathrm{d}\mu_g|_{\partial\Omega} = 0$ wegen Antisymmetrie von Formen und $X^{||}$ schon tangential an $\partial\Omega$ ist.

Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, D-93040 Regensburg, Germany
E-mail address: mail@nikno.de
E-mail address: jan-hendrik.treude@mathematik.uni-regensburg.de