3 Funktionen

3.1 Definition. Seien X und Y Mengen. Eine *Relation zwischen X und Y* ist eine Teilmenge $f \subset X \times Y$. Eine Relation heißt *Funktion*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) f ist *linkstotal*, d.h.

$$\forall x \in X : \exists y \in Y : (x, y) \in f.$$

(b) f ist *rechtseindeutig*, d.h.

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f : x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2.$$

In diesem Fall schreiben wir auch $f : X \to Y$ anstatt $f \subset X \times Y$. Die beiden Bedingungen sind äquivalent zu

$$\forall x \in X : \exists! y \in Y : (x, y) \in f$$

Daher notiert man zu jedem $x \in X$ das eindeutig bestimmte $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$ auch mit $f(x) := y$. Dies bezeichnet man als die *Abbildungsvorschrift*. Die Menge X heißt in diesem Fall *Definitionsmenge* und die Menge Y heißt *Zielmenge*. Man nennt f auch das *Funktionssymbol*.

3.2 Remark. Will man also eine Funktion definieren, so muss man Definitionsmenge, Zielmenge und Abbildungsvorschrift definieren. Dies gibt man am besten in der Form

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

an. Ein Beispiel für eine Funktion ist

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

3.3 Warnung (Gleichheit von Funktionen)**.** Von einem formalen Standpunkt aus, sind zwei Funktionen $f_1 : X_1 \to Y_1$ und $f_2 : X_2 \to Y_2$ genau dann gleich, falls

(a) ihre Definitionsmengen übereinstimmen, d.h. $X_1 = X_2$,

(b) ihre Zielmengen übereinstimmen, d.h. $Y_1 = Y_2$,

(c) ihre Abbildungsvorschriften übereinstimmen, d.h.

$$\forall x \in X_1 = X_2 : f_1(x) = f_2(x).$$

Streng genommen ist daher die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

von dem in 3.2 betrachteten Beispiel verschieden (weil sich ihre Zielmengen unterscheiden). Das wird oft geschlampt, führt aber in manchen Bereichen der Mathematik (z.B. in der homologischer Algebra) in Teufels Küche. Man sollte sich daher angewöhnen, immer auf diese formale Feinheit zu achten.

3.4 Definition (Identität)**.** Für jede Menge X heißt die Funktion

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_X : X &\to X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Identität auf X.

3.5 Definition (Eigenschaften von Funktionen)**.** Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion.

(a) f heißt *injektiv*, falls f *linkseindeutig* ist, d.h.

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

(b) f heißt *surjektiv*, falls f *rechtstotal* ist, d.h.

$$\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y.$$

(c) f heißt *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

3.6 Lemma (Charakterisierung von Bijektivität)**.** Sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

(a) f ist bijektiv.

(b) Es gilt

$$\forall y \in Y : \exists! x \in X : f(x) = y.$$

(c) Es existiert eine Funktion $g : Y \to X$, sodass

$$f \circ g = \mathrm{id}_Y, \qquad\qquad g \circ f = \mathrm{id}_X .$$

In diesem Fall ist g eindeutig bestimmt und wir definieren $f^{-1} := g$.

Beweis. (todo) □

3.7 Definition (Verkettung)**.** Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen. Dann heißt die Funktion

$$\begin{aligned} g \circ f : X &\to Z \\ x &\mapsto f(g(x)) \end{aligned}$$

die *Verkettung von* f *und* g.

3.8 Theorem (Eigenschaften von Verkettungen, siehe Zettel 5, Afg 1)**.** Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen. Dann gilt:

(a) Falls f und g injektiv sind, so ist $g \circ f$ injektiv.

(b) Falls f und g surjektiv sind, so ist $g \circ f$ surjektiv.

(c) Falls f und g bijektiv sind, so ist $g \circ f$ bijektiv und es gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Beweis.

Seien f und g injektiv und es seien $x_1, x_2 \in X$, sodass

$$g(f(x_1)) = (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) = g(f(x_2)).$$

Weil g injektiv ist, folgt daraus

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Weil f injektiv ist, folgt daraus wiederum

$$x_1 = x_2.$$

Damit haben wir gezeigt, dass $g \circ f$ injektiv ist.

(b) Seien f und g surjektiv und es sei $z \in Z$ beliebig. Weil g surjektiv ist, existiert ein $y \in Y$, sodass $g(y) = z$. Weil f surjektiv ist, existiert ein $x \in X$, sodass $f(x) = y$. Daraus folgt

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z.$$

Damit haben wir gezeigt, dass $g \circ f$ surjektiv ist.

(c) Seien f und g bijektiv. Nach Definition sind sie damit sowohl injektiv, als auch surjektiv. Nach dem bisher Gezeigten ist damit $g \circ f$ injektiv und surjektiv. Folglich ist $g \circ f$ bijektiv.
Aus der Definition der Umkehrfunktion folgt

$$\begin{aligned}
&\forall x \in X : (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)(x) = f^{-1}(g^{-1}(g(f(x)))) = f^{-1}(f(x)) = x = \mathrm{id}_X(x),\\
&\forall z \in Z : (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})(z) = g(f(f^{-1}(g^{-1}(z)))) = g(g^{-1}(z)) = z = \mathrm{id}_Z(z).
\end{aligned}$$

Aus der Eindeutigkeit der Umkehrfunktion folgt daher $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

$\square$