1 Maßtheorie

1.1 Definition (Potenzmenge)**.** Sei Ω eine Menge. Dann heißt

$$\mathcal{P}(\Omega) := \{A \subset \Omega\},$$

Potenzmenge von Ω. Die Potenzmenge von Ω ist also die Menge aller Teilmengen von Ω. Eine Teilmenge $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt *Mengensystem* (auf Ω).

1.2 Definition (σ-Algebra)**.** Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt *σ-Algebra* (auf Ω), falls gilt:

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$,

(ii) Komplementstabilität: $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) : A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in F$,

(iii) σ-Vereinigungsstabilität: Für alle Folgen $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Mengen von Ω gilt:

$$\forall i \in \mathbb{N} : A_i \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}.$$

Ein Tupel $(\Omega, \mathcal{F})$ bestehend aus einer Menge Ω und eine σ-Algebra $\mathcal{F}$ auf Ω heißt *messbarer Raum.*

1.3 Lemma. Für jedes Mengensystem $\mathcal{E}$ gibt es eine kleinste σ-Algebra, genannt $\sigma(\mathcal{E})$, die $\mathcal{E}$ enthält, d.h. für jede σ-Algebra $\mathcal{F}$ auf Ω gilt:

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{F} \Longrightarrow \sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}.$$

Man nennt $\sigma(\mathcal{E})$ auch die *von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra.* Umgekehrt nennt man $\mathcal{E}$ einen *Erzeuger* von $\sigma(\mathcal{E})$.

1.4 Remark. Man kann $\sigma(\mathcal{E})$ mehr oder weniger konkret angeben: Es ist der Schnitt über alle σ-Algebren auf Ω, die $\mathcal{E}$ enthalten.

1.5 Definition (Maß)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ heißt *Maß*, falls gilt:

(i) Nicht-Negativität: $\forall A \in \mathcal{F} : \mu(A) \geq 0$.

(ii) σ-Additivität: Für alle Folgen $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von paarweisen disjunkten Mengen in $\mathcal{F}$ gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Das Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ heißt *Maßraum.*

1.6 Definition (W-Maß)**.** Ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ heißt *Wahrscheinlichkeitsraum*, falls $P(\Omega) = 1$. In diesem Fall heißt P ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* (auf Ω).

1.7 Definition (messbare Abbildung)**.** Eine Abbildung $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega', \mathcal{F}')$ zwischen messbaren Räumen heißt *messbar*, falls $X^{-1}(\mathcal{F}') \subset \mathcal{F}$. Das bedeutet also:

$$\forall A' \in \mathcal{F}' : X^{-1}(A') \in \mathcal{F}.$$

Eine messbare Abbildung $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (\Omega, \mathcal{F}')$ zwischen eine W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F}')$ heißt *Zufallsvariable.* Falls $\Omega' = \mathbb{R}$ so wählt man meistens für $\mathcal{F}'$ die Borel-Algebra und spricht dann von einer reellen Zufallsvariable.

1.8 Lemma. Sei $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega', \mathcal{F}')$ eine messbare Abbildung und μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Dann definieren X und μ ein Maß $\mu' := X_*\mu$ auf Ω' durch

$$\forall A' \in \mathcal{F}' : \mu'(A') := \mu(X^{-1}(A')).$$

Es heißt X_*P die *Verteilung von* X. Ist X eine Zufallsvariable, so heißt X_*P die *Wahrscheinlichkeitsverteilung von* X. Dies wird in der Literatur manchmal auch als $P_X := X_*P$ bezeichnet. Zwei solche Zufallsvariablen X und Y heißen *gleichverteilt*, falls $P_X = P_Y$. In diesem Fall schreibt man auch $X \sim Y$.

1.9 Remark. Ist speziell $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein W-Raum und X ein reelle Zufallsvariable, so definiert man für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Schreibweise $\{X \leq c\} := X^{-1}(]-\infty, c])$, $\{X = c\} := X^{-1}(\{c\})$ und damit auch

$$P(X = c) := P(\{X = c\}) = X_*P(\{c\}) = P(X^{-1}(\{c\})) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = c\})$$

und analog

$$P(X \leq c) := P(\{X \leq c\}) := X_*P(]-\infty, c]) := P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq c\}).$$

Man beachte, dass die Verteilung P_X einer Zufallsvariable X ein Maß ist, d.h. $P_X(A)$ is für alle messbaren Mengen $A \subset \mathbb{R}$ definiert. Wertet man P_X speziell auf Mengen obiger Form aus, so erhält man die sog. *Verteilungsfunktion*

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ c &\mapsto P_X(]-\infty, c]) \end{aligned}$$