Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Nikolai Nowaczyk <n.nowaczyk@web.de> http://math.nikno.de/
Lars Wallenborn <lars@wallenborn.net> http://math.wallenborn.net/

06.-08. Mai 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen, Abbildungen, Notation

1.1 Definition (Multiindex)**.** Ein Tupel

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{N}_0^k$$

heißt *Multiindex*. Wir definieren

$$\alpha! := \prod_{i=1}^{k} \alpha_i!$$

und

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i.$$

1.2 Definition (Multinomialkoeffizienten)**.** Für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^k$ sei

$$\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}.$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^k$

$$\binom{n}{\alpha} := \begin{cases} \frac{n!}{\alpha!}, & |\alpha| = n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

1.3 Definition (Anzahl)**.** Für eine endliche Menge Ω sei $|\Omega| \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl aller Elemente in Ω.

1.4 Definition (Potenzmenge)**.** Für eine beliebige Menge Ω heißt

$$2^\Omega := \{A \mid A \subset \Omega\}$$

die *Potenzmenge von* Ω.

1.5 Bemerkung. Diese seltsame Schreibweise erklärt sich folgendermaßen: Es gilt

$$\left|2^\Omega\right| = 2^{|\Omega|}.$$

Das kann man sich z.B. per Induktion klar machen.

2 Wahrscheinlichkeitsräume und Zufallsvariablen

Von nun an sei Ω stets eine endliche Menge.

2.1 Definition (Wahrscheinlichkeitsmaß)**.** Eine Abbildung $P : 2^\Omega \to [0,1]$ heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß* , falls gilt

(i). Normierung: $P(\Omega) = 1$

(ii). Additivität: Sind $A, B \in 2^\Omega$ zwei disjunkte Teilmengen von Ω, dann gilt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

2.2 Definition (Zähldichte)**.** Sei Ω eine endliche Menge. Eine Abbildung $\rho : \Omega \to [0,1]$, sodass

$$\sum_{\omega \in \Omega} \rho(\omega) = 1$$

heißt *Zähldichte* oder auch *Wahrscheinlichkeitsvektor auf* Ω .

2.3 Lemma. Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß P auf Ω ist

$$\begin{aligned} \rho_P : \Omega &\to [0,1] \\ \omega &\mapsto P(\{\omega\}) \end{aligned}$$

eine Zähldichte. Für jede Zähldichte $\rho : \Omega \to [0,1]$ ist

$$\begin{aligned} P_\rho : 2^\Omega &\to [0,1] \\ A &\mapsto \textstyle\sum_{a \in A} \rho(a) \end{aligned}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Durch diese Formeln können Zähldichten und Wahrscheinlichkeitsmaße miteinander identifiziert werden.

2.4 Definition (Wahrscheinlichkeitsraum)**.** Ein Tupel (Ω, ρ) bestehend aus

(i). einer endlichen Menge Ω und

(ii). einer Zähldichte ρ auf Ω

heißt *Wahrscheinlichkeitsraum*. Wir nennen dann 2^Ω den zugehörigen *Ereignisraum* und jedes $A \in 2^\Omega$ ein *Ereignis*. Für jedes $A \in 2^\Omega$ heißt $P(A)$ *Wahrscheinlichkeit von* A.

Ein besonders einfacher Wahrscheinlichkeitsraum wird uns immer wieder begegnen.

2.5 Definition (uniforme Verteilung)**.** Sei Ω eine endliche Menge. Definiere

$$\begin{aligned} \rho_\Omega : \Omega &\to [0,1] \\ \omega &\mapsto \tfrac{1}{|\Omega|}. \end{aligned}$$

Dann heißt ρ_Ω die *uniforme Verteilung auf* Ω. Das Tupel (Ω, ρ_Ω) ist dann ein Wahrscheinlichkeitsraum, in dem das Eintreten eines jeden Ereignisses $\{\omega\} \in 2^\Omega$, $\omega \in \Omega$, gleich wahrscheinlich ist.

2.6 Definition (Zufallsvariable)**.** Seien (Ω, ρ), $(\tilde{\Omega}, \tilde{\rho})$ zwei Wahscheinlichkeitsräume. Dann heißt eine Abbildung $X : \Omega \to \tilde{\Omega}$ *Zufallsvariable*. Wir schreiben dann auch $X : (\Omega, \rho) \to (\tilde{\Omega}, \tilde{\rho})$.

2.7 Satz und Definition (Induzierte Verteilung)**.** Sei (Ω, ρ) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\tilde{\Omega}$ eine endliche Menge und $X : \Omega \to \tilde{\Omega}$ irgendeine Abbildung. Dann ist

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} : \tilde{\Omega} &\to [0,1] \\ \tilde{\omega} &\mapsto P_\rho(X^{-1}(\tilde{\omega})) \end{aligned}$$

eine Zähldichte auf $\tilde{\Omega}$. Wir nennen $\tilde{\rho}$ die *von* X *induzierte Verteilung auf* $\tilde{\Omega}$ und notieren das auch mit $\rho_X := \tilde{\rho}$ und mit $P_X := P_{\rho_X}$ das von ρ_X induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß. Damit ist dann $X : (\Omega, \rho) \to (\tilde{\Omega}, \tilde{\rho})$ eine Zufallsvariable.

Beweis. Wir müssen lediglich nachrechnen, dass

$$\sum_{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}} \tilde{\rho}(\tilde{\omega}) = \sum_{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}} P_\rho(X^{-1}(\tilde{\omega})) = \sum_{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}} \sum_{\substack{\omega \in \Omega, \\ X(\omega) = \tilde{\omega}}} \rho(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \rho(\omega) = 1$$

□

2.8 Satz und Definition. Sei (Ω, ρ) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $k \in \mathbb{N}$. Dann definiert

$$\begin{aligned} \rho^k : \Omega^k &\to [0,1] \\ \omega = (\omega_1, \dots, \omega_k) &\mapsto \textstyle\prod_{i=1}^k \rho(\omega_i) \end{aligned}$$

eine Zähldichte auf Ω^k. Wir nennen dann $(\Omega, \rho)^k := (\Omega^k, \rho^k)$ den *k-fachen Produktraum über* (Ω, ρ).

Beweis. Auch hier müssen wir lediglich zeigen

$$\sum_{\omega \in \Omega^k} \rho^k(\omega) = 1.$$

Das machen wir per Induktion nach k.

Schritt 1 (Induktionsverankerung $k = 1$): Dies folgt nach Definition.

Schritt 2 (Induktionsschluss $k \to k+1$): Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\sum_{\omega \in \Omega^{k+1}} \rho^{k+1}(\omega) &= \sum\nolimits_{(\omega_1,\dots,\omega_k)\in\Omega^k} \sum\nolimits_{\omega_{k+1}\in\Omega} \prod_{i=1}^{k+1} \rho(\omega_i) \\
&= \sum\nolimits_{\omega_{k+1}\in\Omega} \sum\nolimits_{(\omega_1,\dots,\omega_k)\in\Omega^k} \prod_{i=1}^{k+1} \rho(\omega_i) \\
&= \sum\nolimits_{\omega_{k+1}\in\Omega} \rho(\omega_{k+1}) \sum\nolimits_{(\omega_1,\dots,\omega_k)\in\Omega^k} \prod_{i=1}^{k} \rho(\omega_i) \\
&= \sum\nolimits_{\omega_{k+1}\in\Omega} \rho(\omega_{k+1}) \sum\nolimits_{(\omega_1,\dots,\omega_k)\in\Omega^k} \rho^k(\omega_1,\dots,\omega_k) \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \sum\nolimits_{\omega_{k+1}\in\Omega} \rho(\omega_{k+1}) \cdot 1 = 1.
\end{aligned}$$

□

3 Die Urnenmodelle

3.1 Definition (Urnenmodelle)**.** Als *Urnenmodelle* bezeichnet man eine sehr häufig benutzte Klasse von Zufallsexperimenten. Anschaulich passiert Folgendes: In einer Urne befindet sich eine feste endliche Anzahl von Bällen. Diese Bälle sind unterscheidbar, d.h. durchnummeriert von sagen wir 1 bis n. Außerdem hat jeder Ball i eine Farbe $f(i)$. Das Experiment besteht darin, dass k-mal hintereinander ein Ball aus der Urne gezogen und seine Nummer oder Farbe notiert wird. Man erhält so eine Folge von Nummern bzw. Farben. Man unterscheidet vier Variationen dieses Experiments: Je nach dem, ob man einen Ball, nachdem er gezogen wurde, wieder in die Urne zurück oder an die Seite legt, unterscheidet man zwischen *Ziehen mit Zurücklegen* und dem *Ziehen ohne Zurücklegen*. Außerdem unterscheidet man zwischen *geordnetem* und *ungeordnetem Ziehen*. Beim geordneten Ziehen interessiert wirklich die genaue Abfolge der gezogenen Farben, beim ungeordneten Ziehen nur die Häufigkeit der gezogenen Zahlen oder Farben. Damit erhalten wir durch Kombination insgesamt vier mögliche Experimente. Die stochastische Fragestellung lautet immer: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine gegebene Folge / Häufigkeitsverteilung von Zahlen oder Farben gezogen wird. Diese werden wir in diesem Kapitel untersuchen in dem wir vier Wahrscheinlichkeitsräume konstruieren werden, die die jeweilige Situation abbilden sollen: In jedem der Fälle unterscheidet man noch, ob die Bälle eingefärbt sind oder nicht. Siehe jedoch

Ziehen	mit Zurücklegen	ohne Zurückklegen
geordnet	Ω	Ω'
ungeordnet	$\hat{\Omega}$	$\tilde{\Omega}$

Tabelle 1: Urnenmodelle

Bemerkung 3.14.

3.1 Bälle, Farben, Urnen

3.2 Definition. Für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, sei

$$[n] := \{1, 2, \dots, n\}$$

und

$$[n]_0 := \{0, \ldots, n\}.$$

3.3 Definition (Bälle und Farben)**.** Sei $n \geq 1$. Dann nennen wir jede Zahl

$$i \in [n]$$

einen *Ball*. Sei E eine endlich Menge mit $l := |E| \geq 1$. Dann nennen wir jedes

$$e \in E$$

eine *Farbe*. Sinnigerweise nennen wir in diesem Fall also $[n]$ die "Bälle" und E die "Farben". Eine Abbildung $f : [n] \to E$ zwischen Bällen und Farben heißt *Farbfunktion*. Für jeden Ball $i \in [n]$ heißt $f(i)$ die *Farbe von i*. Wir definieren dann für jedes $e \in E$

$$F_e := f^{-1}(e), \qquad N_e := |F_e|.$$

Es ist also $F_e \subset [n]$ die Menge aller Bälle mit Farbe e und N_e die Anzahl aller Bälle mit Farbe e. Es kann für Anwendungen nützlich sein, sich E z.B. als $E := \{\text{rot}, \text{blau}, \text{grün}\}$ vorzustellen. Zum Rechnen ist es aber einfacher, die Farben ebenfalls durchzunummerieren. In diesem Fall ist dann $E = [l]$. Falls nicht ausdrücklich anders erwähnt, benutzen wir immer Letzteres.

3.4 Experiment (farbloser Ball)**.** Gegeben sei eine Menge von n farblosen Bällen. Das Experiment besteht nun darin, dass zufällig ein Ball ausgewählt wird. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein vorgegebener Ball $i \in [n]$ ausgewählt wurde? Wenn wir davon ausgehen, dass jeder Ball mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt wird, dann lautet die Antwort wohl $\frac{1}{n}$. Daher wollen wir diesem realen Experiment nun einen Wahrscheinlichkeitsraum zuweisen, der genau diese Intuition formalisiert.

3.5 Definition (Ballraum)**.** Der Wahrscheinlichkeitsraum $([n], \rho_n)$, wobei $\rho_n := \rho_{[n]}$ die uniforme Verteilung aus Definition 2.5 ist, heißt *Ballraum*. Wir notieren das induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß mit $P_n := P_{\rho_n}$.

3.6 Experiment (farbiger Ball)**.** Gegeben sei eine Menge von n farbigen Bällen und es sei E die Menge aller auftretenden Farben. Das Experiment besteht nun erneut darin, dass zufällig ein Ball ausgewählt wird. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der gezogener Ball eine vorgegebene Farbe $e \in E$ hat? Die Intuition sagt uns, dass dies gerade dem Verhältnis aus der Anzahl der Bälle mit Farbe e und der Gesamtzahl der Bälle n entsprechen sollte. Auch dies kann formalisiert werden.

3.7 Definition (Farbraum)**.** Sei $f : [n] \to E$ eine Farbfunktion auf einem Ballraum $([n], \rho_n)$. Dann heißt der Wahrscheinlichkeitsraum (E, ρ_f), wobei ρ_f die von f auf E induzierte Verteilung aus Definition 2.7 ist, *Farbraum*. Wir notieren das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß mit P_f.

Eine sehr kurze Rechnung zeigt nun, dass der Ballraum und der Farbraum auch formal die gewünschten Eigenschaften haben.

3.8 Lemma (Eigenschaften von Ball- und Farbraum)**.**

(i). In jedem Ballraum $([n], \rho_n)$ gilt: Für jedes $i \in [n]$ hat das Ereignis $\{i\} \in 2^{[n]}$ die Wahrscheinlichkeit

$$P_n(\{i\}) = \frac{1}{n}.$$

(ii). Sei $F : [n] \to E$ eine Farbfunktion. Für jedes $e \in E$ hat das Ereignis $\{e\} \in 2^E$ die Wahrscheinlichkeit
$$P_f(\{e\}) = \frac{N_e}{n}.$$

Beweis.

(i). Aus den Definitionen folgt sofort
$$P_{\rho_n}(\{i\}) = \rho_n(i) = \frac{1}{|[n]|} = \frac{1}{n}.$$

(ii). Ebenfalls aus den Definitionen folgt
$$P_{\rho_f}(\{e\}) = P_{\rho_n}(f^{-1}(e)) = \sum_{i \in f^{-1}(e)} \rho_n(i) \overset{\text{(i)}}{=} \sum_{i \in f^{-1}(e)} \frac{1}{n} = \frac{|F_e|}{n} = \frac{N_e}{n}.$$

□

3.2 Ziehen mit Zurücklegen

3.2.1 geordnet

Da dieser Fall der mit Abstand einfachste ist, diskutieren wir ihn zuerst.

3.9 Experiment (farbloses geordnetes Ziehen mit Zurücklegen)**.** In einer Urne seien n farblose durchnummerierte Bälle. Wir ziehen nun k mal zufällig einen Ball aus der Urne, notieren seine Nummer, und legen ihn zurück in die Urne. Wir erhalten eine Folge $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k)$ von Nummern. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine vorgegebene Nummernfolge $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k)$ gezogen wird?

3.10 Satz und Definition. Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\bar{\Omega}, \bar{\rho}) := ([n], \rho_n)^k$ heißt *farbloses geordnetes Ziehen mit Zurücklegen*. Wir notieren sein Wahrscheinlichkeitsmaß mit $\bar{P}$. Sei $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k) \in \bar{\Omega}$ beliebig vorgegeben. Dann gilt
$$\bar{P}(\{\nu\}) = \rho_n^k(\nu) = \frac{1}{n^k} = \frac{1}{|\bar{\Omega}|}.$$
Der Raum $\bar{\Omega}$ hat also auch die uniforme Verteilung.

Beweis. Dies ergibt sich sofort aus der Definition 2.8 des Produktraumes. □

3.11 Experiment (farbiges geordnetes Ziehen mit Zurücklegen)**.** In einer Urne seien n farbige Bälle und es seien E alle auftretenden Farben. Wir ziehen nun k mal zufällig einen Ball aus der Urne, notieren seine Farbe, und legen ihn zurück in die Urne. Wir erhalten eine Folge $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)$ von Farben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine vorgegebene Farbfolge $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)$ gezogen wird?

3.12 Satz und Definition. Sei $f : [n] \to E$ eine Farbfunktion. Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \rho) := (E, \rho_f)^k$ heißt *farbiges geordnetes Ziehen mit Zurücklegen*. Wir notieren sein Wahrscheinlichkeitsmaß mit $P := P_\rho$. Für jede Farbfolge $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)$ gilt
$$P(\{\eta\}) = \rho(\eta) = \prod_{i=1}^{k} \rho_f(\eta_i) = \frac{1}{n^k} \prod_{i=1}^{k} N_{\eta_i}.$$

Ist übrigens

$$\begin{aligned} F : [n]^k &\to E^k \\ (\nu_1, \ldots, \nu_k) &\mapsto (f(\nu_1), \ldots, f(\nu_k)), \end{aligned}$$

die Funktion die einer Folge von Bällen die zugehörige Folge von Farben zuordnet, so gilt $\rho_F = \rho_f^k$, falls wir F als eine Funktion auf $([n]^k, \rho_n^k)$ betrachten.

Beweis. Für jedes $\eta \in \Omega$ gilt

$$P(\{\eta\}) = \rho(\eta) \overset{2.8}{=} \prod_{i=1}^{k} \rho_f(\eta_i) \overset{3.8(ii)}{=} \prod_{i=1}^{n} \frac{N_{\eta_i}}{n} = \frac{1}{n^k} \prod_{i=1}^{k} N_{\eta_i}.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \rho_F(\eta) = \rho_n^k(F^{-1}(\eta)) &= \sum_{\nu \in F^{-1}(\eta) \subset \bar{\Omega}} \rho_n^k(\nu) = \sum_{\nu \in F^{-1}(\eta) \subset \bar{\Omega}} \frac{1}{n^k} \\ &= \frac{1}{n^k} \sum_{\nu \in F^{-1}(\eta) \subset \bar{\Omega}} 1 = \frac{1}{n^k} \left| F^{-1}(\eta) \right| = \rho(\eta) = \rho_f^k(\eta). \end{aligned}$$

□

3.13 Korollar. Falls in obigem Satz 3.12 jeder Ball genau eine Farbe hat, d.h. falls $f : [n] \to E$ bijektiv ist, so geht der farbige Fall in den farblosen Fall über, d.h. es gilt dann

$$P(\{\eta\}) = \frac{1}{n^k}.$$

wie in Satz 3.10.

3.14 Bemerkung. Anstatt die Bälle mit Nummern $i \in [n]$ durchzunummerieren können sie ja auch mit verschiedenen Farben $e \in E$ "durchgefärbt" werden. Ist $E = \{1, \ldots, n\}$, so entspricht f lediglich einer Umnummerierung. Falls $f(i) = i$, so ändert sich überhaupt nichts. Dies bezeichnen wir im Folgenden als den *farblosen Fall*. Wir wollen daher bei den anderen Experimenten immer gleich den farbigen Fall studieren. Der farblose folgt dann direkt so wie hier. Es ist allerdings zugegebenermaßen etwas verwirrend, dass der farbige Fall ausgerechnet für maximal viele verschiedene Farben in den farblosen Fall übergeht.

3.2.2 ungeordnet

3.15 Experiment (ungeordnetes Ziehen mit Zurücklegen)**.** In einer Urne seien n durchnummerierte Bälle mit l unterschiedlichen Farben E. Wir ziehen nun k mal zufällig einen Ball aus der Urne, notieren seine Farbe, und legen ihn zurück in die Urne. Wir erhalten eine Folge $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_k) \in E^k$ von Farben. Für jede Farbe $e \in E$ zählen wir nun, wie oft sie in der Folge η vorkommt. Wir erhalten somit eine Folge $\hat{\mu} = (\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_l)$ von Häufigkeiten, wobei für alle $1 \leq e \leq l$

$$\hat{\mu}_e(\eta) := \left| \{\eta_i \in E \mid i \in [k], f(\eta_i) = e\} \right|,$$

d.h. μ_e gibt an, wie oft Farbe e gezogen wurde. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich beim Ziehen eine vorgegebene Häufigkeitsverteilung $\hat{\mu} = (\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_l)$ ergibt?

3.16 Satz und Definition (ungeordnetes Ziehen mit Zurücklegen)**.** Definiere

$$\widehat{\Omega} := \{\hat{\mu} \in [k]_0^l \mid |\hat{\mu}| = k\}$$

und es sei

$$\begin{aligned} S : \Omega &\to \widehat{\Omega} \\ \eta &\mapsto (\hat{\mu}_1(\eta), \ldots, \hat{\mu}_l(\eta)). \end{aligned}$$

Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\widehat{\Omega}, \hat{\rho})$, $\hat{\rho} := \rho_S$, heißt dann *(farbiges) ungeordnetes Ziehen mit Zurücklegen*. Wir notieren sein Wahrscheinlichkeitsmaß mit $\hat{P}$. Sei $\hat{\mu} = (\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_l) \in \hat{\Omega}$ beliebig vorgegeben. Dann gilt

$$\hat{P}(\{\hat{\mu}\}) = \rho_S(\hat{\mu}) = \binom{k}{\hat{\mu}} \prod_{e \in E} \rho_f(e)^{\hat{\mu}_e}.$$

Beweis. Wir rechnen

$$\begin{aligned} \hat{P}(\{\hat{\mu}\}) = \rho_S(\hat{\mu}) = P(S^{-1}(\hat{\mu})) &= \sum_{\eta \in S^{-1}(\hat{\mu})} \rho(\eta) \overset{3.12}{=} \sum_{\eta \in S^{-1}(\hat{\mu})} \prod\nolimits_{i=1}^k \rho_f(\eta_i) \\ &= \sum_{\eta \in S^{-1}(\hat{\mu})} \prod\nolimits_{e=1}^l \rho_f(e)^{\hat{\mu}_e} = \prod\nolimits_{e=1}^l \rho_f(e)^{\hat{\mu}_e} \sum_{\eta \in S^{-1}(\hat{\mu})} 1 = \binom{k}{\hat{\mu}} \prod\nolimits_{e=1}^l \rho_f(e)^{\hat{\mu}_e}, \end{aligned}$$

wobei man die letzte Gleichung wie folgt einsehen kann: Für eine gegebene Häufigkeitsverteilung $\hat{\mu}$ müssen wir also die Anzahl aller Farbfolgen η bestimmen, die die Häufigkeitsverteilung $S(\eta) = \hat{\mu}$ haben. Da $|\hat{\mu}| = k$ besteht die Farbfolge aus k Bällen. Es gibt $k!$ Möglichkeiten diese anzuordnen. Wir unterscheiden aber nicht zwischen Bällen gleicher Farbe. Daher fallen bei diesen $k!$ Möglichkeiten für jede Farbe e grade $\hat{\mu}_e!$ Möglichkeiten weg. Insgesamt erhalten wir also $\binom{k}{\hat{\mu}} = \frac{k!}{\hat{\mu}!}$ viele Möglichkeiten. □

3.17 Definition (Multinomialverteilung)**.** Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\widehat{P}$ auf $\widehat{\Omega}$ aus obigem Satz 3.16 heißt auch *Multinomialverteilung* zu k und ρ und wird auch mit

$$\mathcal{M}_{k,\rho}(\{\hat{\mu}\}) := \widehat{P}(\{\hat{\mu}\}) = \binom{k}{\hat{\mu}} \prod_{e \in E} \rho_f(e)^{\hat{\mu}_e}$$

notiert.

3.18 Korollar (farbloser Fall)**.** Im farblosen Fall gilt

$$\hat{P}(\{\hat{\mu}\}) = \rho_S(\hat{\mu}) = \binom{k}{\hat{\mu}} \prod_{e \in E} \left(\frac{1}{l}\right)^{\hat{\mu}_e} = \frac{1}{l^k}\binom{k}{\hat{\mu}} = \frac{1}{n^k}\binom{k}{\hat{\mu}}.$$

3.3 Ziehen ohne Zurücklegen

3.3.1 farblos

Auch beim Ziehen ohne Zurücklegen ist es nützlich zunächst den farblosen Fall zu untersuchen.

3.19 Experiment (farbloses geordnetes Ziehen mit Zurücklegen)**.** In einer Urne seien n durchnummerierte Bälle. Wir ziehen nun k mal zufällig einen Ball aus der Urne, notieren seine Nummer, und legen ihn *nicht* zurück in die Urne. Wir erhalten eine Folge $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_k) \in [n]^k$ von Nummern. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich beim Ziehen eine vorgegebene Folge von Nummern $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_k)$ ergibt? Dieses Experiment ergibt ganz offensichtlich nur Sinn, falls $k \leq n$ (im Gegensatz zum Ziehen mit Zurücklegen).

3.20 Satz und Definition (farbloses geordnetes Ziehen ohne Zurücklegen)**.** Sei $k \le n$. Definiere

$$\Omega_\Delta := \{\nu \in [n]^k \mid \forall 1 \le i,j \le k : i \ne j \Rightarrow \nu_i \ne \nu_j\},$$

(das heißt einfach nur, dass die Einträge von ν paarweise verschieden sein sollen) und es seien ρ_Δ, $P_\Delta := P_{\rho_\Delta}$ gegeben durch die uniforme Verteilung. Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_\Delta, P_\Delta)$ heißt *farbloses geordnetes Ziehen ohne Zurücklegen*. Es gilt für jedes $\nu \in \Omega_\Delta$

$$P_\Delta(\{\nu\}) = \rho_\Delta(\nu) = \frac{1}{|\Omega_\Delta|} = \frac{1}{n(n-1)\dots(n-k+1)} = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

Beweis. Es genügt $|\Omega_\Delta|$ zu berechnen: Da die Einträge eines jeden $\nu \in \Omega_\Delta$ paarweise verschieden sein sollen (was anschaulich heißt, dass ein einmal gezogener Ball nicht nochmals gezogen werden kann), gibt es für den ersten Eintrag also n Möglichkeiten, für den zweiten $(n-1)$ Möglichkeiten u.s.w. bis man schließlich noch $(n-k+1)$ Möglichkeiten für den k-ten Eintrag übrig hat. □

3.21 Experiment (farbloses ungeordnetes Ziehen ohne Zurücklegen)**.** In einer Urne seien n durchnummerierte Bälle. Wir ziehen nun k mal zufällig einen Ball aus der Urne, notieren seine Nummer, und legen ihn nicht zurück in die Urne. Unter Vernachlässigung der Reihenfolge erhalten wir eine Menge $\check\nu = \{\check\nu_1, \dots, \check\nu_k\} \subset [n]$ von Nummern. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine vorgegebene Menge $\check\nu$ gezogen wird?

3.22 Satz und Definition (farbloses ungeordnetes Ziehen ohne Zurücklegen)**.** Sei $k \le n$. Definiere

$$\check\Omega := \{\check\nu \subset [n] \mid |\check\nu| = k\}$$

und es seien $\check\rho$, $\check P := P_{\check\rho}$ gegeben durch die uniforme Verteilung. Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\check\Omega, \check P)$ heißt *farbloses ungeordnetes Ziehen ohne Zurücklegen*. Ist

$$\begin{aligned} Y : \Omega_\Delta &\to \check\Omega \\ \nu = (\nu_1, \dots, \nu_k) &\mapsto \{\nu_1, \dots, \nu_k\}, \end{aligned}$$

so gilt $\rho_Y = \check\rho$ und außerdem für jedes $\check\nu \in \check\Omega$

$$\check P(\{\check\nu\}) = \check\rho(\check\nu) = \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

Die Gleichheit $\rho_Y = \check\rho$ bedeutet anschaulich, dass es beim ungeordneten Ziehen ohne Zurücklegen egal ist, ob wir der Reihe nach k Bälle ziehen und dann die Reihenfolge vernachlässigen oder alle k Bälle mit einem Griff auswählen.

Beweis. Wir rechnen

$$\rho_Y(\check\nu) = P_\Delta(S^{-1}(\check\nu)) = \sum_{\nu \in S^{-1}(\check\nu)} \rho_\Delta(\nu) \overset{3.20}{=} k! \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{1}{|\check\Omega|} = \check\rho(\check\nu).$$

□

3.3.2 farbig

3.23 Experiment (farbiges geordnetes Ziehen ohne Zurücklegen)**.** In einer Urne seien n durchnummerierte Bälle in l verschiedenen Farben. Wir ziehen nun k mal zufällig einen Ball aus der Urne, notieren seine Farbe, und legen ihn *nicht* zurück in die Urne. Wir erhalten eine Folge $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_k) \in [l]^k$ von Nummern. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich beim Ziehen eine vorgegebene Folge von Farben $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_k)$ ergibt? Dieses Experiment ergibt ganz offensichtlich nur Sinn, falls $k \leq n$ (im Gegensatz zum Ziehen mit Zurücklegen).

3.24 Satz und Definition (farbiges geordnetes Ziehen ohne Zurücklegen)**.** Sei $k \leq n$. Definiere

$$\Omega' := E^k.$$

Definiere

$$\begin{array}{rcl} F' : \Omega_\Delta & \to & \Omega' \\ \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_k) & \mapsto & (f(\nu_1), \ldots, f(\nu_k)) \end{array}$$

und $\rho' := \rho_{F'}$. Der Wahrscheinlichkeitsraum (Ω', P') heißt *farbiges geordnetes Ziehen ohne Zurücklegen*. Es gilt für jedes $\eta' \in \Omega'$

$$P'(\{\eta'\}) = \rho'(\eta') = \frac{(n-k)!}{k!} \prod_{i=1}^{k} N_{\eta'_i}.$$

Beweis. Wir rechnen

$$P'(\eta') = \rho'(\eta') \overset{3.20}{=} |F'^{-1}(\eta')| \frac{(n-k)!}{k!} = \frac{(n-k)!}{k!} \prod_{i=1}^{k} N_{\eta'_i}.$$

□

3.25 Experiment (farbiges ungeordnetes Ziehen ohne Zurücklegen)**.** In einer Urne seien n durchnummerierte farbige Bälle in l verschiedenen Farben E. Wir ziehen nun k mal zufällig einen Ball aus der Urne, notieren seine Nummer und legen ihn *nicht* zurück in die Urne. Wir erhalten eine Menge $\check{\nu} = \{\check{\nu}_1, \ldots, \check{\nu}_k\} \subset [n]$ von farbigen Bällen. Für jede Farbe $e \in E$ zählen wir die auftretende Häufigkeit

$$\mu_e(\check{\nu}) := |\check{\nu} \cap F_e|$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich beim Ziehen eine vorgegebene Folge von Häufigkeiten $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_l)$ ergibt?

3.26 Satz und Definition (farbiges ungeordnetes Ziehen ohne Zurücklegen)**.** Sei $k \leq n$. Definiere

$$\tilde{\Omega} := \widehat{\Omega} = \{\tilde{\mu} \in [k]_0^l \mid |\tilde{\mu}| = k\}.$$

Definiere

$$\begin{array}{rcl} T : \check{\Omega} & \to & \tilde{\Omega} \\ \check{\nu} & \mapsto & (\mu_1(\check{\nu}), \ldots, \mu_l(\check{\nu})) = (|\check{\nu} \cap F_1|, \ldots, |\check{\nu} \cap F_l|). \end{array}$$

Definiere $\tilde{\rho} := \rho_T$. Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{P})$ heißt *farbiges ungeordnetes Ziehen ohne Zurücklegen*. Es gilt für jedes $\tilde{\mu} \in \tilde{\Omega}$ gilt

$$\tilde{P}(\{\tilde{\mu}\}) = \tilde{\rho}(\tilde{\mu}) = \frac{\prod_{e \in E} \binom{N_e}{\tilde{\mu}_e}}{\binom{n}{k}}.$$

Beweis. Wir rechnen

$$\tilde{P}(\tilde{\mu}) = \tilde{\rho}(\tilde{\mu}) = \check{P}(T^{-1}(\tilde{\mu})) = \sum_{\check{\nu} \in T^{-1}(\tilde{\mu})} \check{\rho}(\check{\nu}) \overset{3.22}{=} |T^{-1}(\tilde{\mu})| \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{\prod_{e \in E} \binom{N_e}{\tilde{\mu}_e}}{\binom{n}{k}},$$

wobei man die letzte Gleichheit wie folgt einsehen kann: Für jede Farbe $e \in E$ gibt es genau $\binom{N_e}{\tilde{\mu}_e}$ viele Möglichkeiten eine $\tilde{\mu}_e$ viele Bälle der Farbe e zu ziehen. Man erhält also die Anzahl der möglichen Ballmengen zu einer gegebenen Häufigkeitsverteilung $\tilde{\mu}$ als das behauptete Produkt. □

3.27 Definition (Hypergeometrische Verteilung)**.** Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{P}$ auf $\tilde{\Omega}$ aus Satz 3.26 oben heißt auch *hypergeometrische Verteilung* und wird mit

$$\mathcal{H}_{n,N}(\tilde{\mu}) = \frac{\prod_{e \in E} \binom{N_e}{\tilde{\mu}_e}}{\binom{n}{k}}$$

notiert. Hier ist $N := (N_1, \ldots, N_l)$ der Vektor der Farbanzahlen und $k := |\tilde{\mu}|$.

Stellen wir alle Ergebnisse dieses Kapitels zusammen, so können wir sämtliche Fragen der Zufallsexperimente aller Urnenmodelle aus 3.1 beantworten.

3.28 Satz (Urnenmodelle)**.** In einer Urne seien n durchnummerierte Bälle mit Farben E, $|E| = l$. Es werden daraus k Bälle gezogen. Dann wird dieses Ziehen mit/ohne Zurücklegen durch die folgenden Wahrscheinlichkeitsräume modelliert:

Ziehen	mit Zurücklegen	ohne Zurückklegen
geordnet	$\Omega = E^k$, $\rho(\eta) = \frac{1}{n^k} \prod_{i=1}^k N_{\eta_i}$, Satz 3.12	$\Omega' = E^k$, $\rho'(\eta') = \frac{(n-k)!}{k!} \prod_{i=1}^k N_{\eta'_i}$, Satz 3.24
ungeordnet	$\hat{\Omega} = \{\hat{\mu} \in [k]_0^l \mid \lvert\hat{\mu}\rvert = k\}$, $\hat{\rho}(\hat{\mu}) = \mathcal{M}_{k,\rho}(\hat{\mu}) = \binom{k}{\hat{\mu}} \prod_{e \in E} \rho_f(e)^{\hat{\mu}_e}$, multinomial, Satz 3.16	$\tilde{\Omega} = \{\tilde{\mu} \in [k]_0^l \mid \lvert\tilde{\mu}\rvert = k\}$, $\tilde{\rho}(\tilde{\mu}) = \mathcal{H}_{n,N}(\tilde{\mu}) = \frac{\prod_{e \in E} \binom{N_e}{\tilde{\mu}_e}}{\binom{n}{k}}$, hypergeometrisch, Satz 3.26

Tabelle 2: Urnenmodelle (farbig)

Ziehen	mit Zurücklegen	ohne Zurückklegen
geordnet	$\bar{\Omega} = N_n^k$, $\bar{\rho}(\bar{\nu}) = \frac{1}{n^k}$, uniform, Satz 3.10	$\Omega_\Delta = \{\nu \in [n]^k \mid \forall 1 \leq i,j \leq k : i \neq j \Rightarrow \nu_i \neq \nu_j\}$, $\rho_\Delta(\nu) = \frac{(n-k)!}{n!}$, uniform, Satz 3.20
ungeordnet	$\hat{\Omega} \cong [n]^k$, $\hat{\rho}(\hat{\mu}) = \frac{1}{n^k} \binom{k}{\hat{\mu}}$, Korollar 3.18	$\check{\Omega} = \{\check{\nu} \subset [n] \mid \lvert\check{\nu}\rvert = k\}$, $\check{\rho}(\check{\nu}) = \frac{1}{\binom{n}{k}}$, uniform, Satz 3.22

Tabelle 3: Urnenmodelle (farblos)

Literatur

[1] Georgii, Hans-Otto: “Stochastik”

Index

Symbolverzeichnis