Sphärische Geometrie

Nikolai Nowaczyk <n.nowaczyk@web.de> http://math.nikno.de/
Lars Wallenborn <lars@wallenborn.net> http://math.wallenborn.net/

03.-05. Dezember 2010

Dies ist ein Skript zum gleichnamigen Vortrag, welcher auf der Winterakademie 2010 des Landesverbands Mathematikwettbewerbe NRW e.V. gehalten wurde (http://www.soak-nrw.de/). Zielgruppe sind interessierte Oberstufenschüler. Wir entwickeln hier den Begriff des sphärischen Dreiecks analog zur euklidischen Geometrie. Um ein tieferes Verständnis zu ermöglichen, werden einige klassische Sätze der euklidischen Geometrie im sphärischen Fall diskutiert und bewiesen. Formal baut der Vortrag auf der Vektorrechnung der Oberstufe und der euklidischen Geometrie der Mittelstufe auf. Die entsprechenden Grundlagen können je nach Bedarf unterschiedlich intensiv wiederholt werden. Der Stil des Skriptes ist so universitär wie möglich gehalten und soll exemplarisch mathematisches Arbeiten verdeutlichen. Formal bedeutet dies vor allem Axiomatismus, Klarheit und Exaktheit. Das bedeutet aber nicht, dass wir Anschauungen verbannen wollen, obgleich dieses Skript kein einziges Bild enthält (was sich in künftigen Versionen vielleicht noch ändern wird). Es ist uns im Gegenteil ein besonderes Anliegen geometrische Anschauungen mit formalen Begriffen in Einklang zu bringen, was gerade bei diesem Thema sehr gut möglich ist. Hilfreiche Bilder können übrigens beim Lesen und Vortragen leicht selbst gezeichnet werden. Wem das nicht reicht, der möge sich ein sphärisches Dreieck einfach basteln: Man muss nur um einen Tennisball drei Gummibänder spannen. Dies ist meistens ohnehin viel nützlicher als jedes Bildchen, weil der dreidimensionale Eindruck dadurch viel besser zur Geltung kommt. Dieses Skript ist eine erste Rohfassung. Wer Fehler findet, Kritik oder Verbesserungsvorschläge machen möchte, sende uns bitte eine E-Mail. Wir sind für Kommentare und Feedback vom Tippfehler bis zur Konzeption - insbesondere auch von Schülern - immer dankbar. Das Skript ist online verfügbar und kann daher auch leicht aktualisiert werden. Alle nötigen Adressen stehen oben im Titel.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen: Vektorrechnung

"Aktivieren Sie den Multi-Vektor-Angriffsmodus!"
— Rekar, Romulanischer Commander, 2374

1.1 Definition ($\mathbb{R}^3$)**.** Man nennt

$$\mathbb{R}^3 := \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

den *(dreidimensionalen) euklidischen Raum* oder auch den "R hoch drei". Ein Element $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ heißt *Vektor* und x_1, x_2, x_3 seine *Koordinaten*. Analog definiert man auch den $\mathbb{R}^2$, den man in der Geometrie auch häufig *euklidische Ebene* nennt. Die Physiker machen kleine Pfeile über ihre Vektoren, z.B. $\vec{x}$. Wir nicht.

1.2 Definition (Vektoroperationen)**.** Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind folgende Operationen definiert.

Addition

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Skalarmultiplikation

$$\lambda x := \lambda \cdot x := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \in \mathbb{R}.$$

Norm/Länge

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Kreuzprodukt

$$x \times y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

1.3 Definition (Winkel)**.** Für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$, $x, y \neq 0$, heißt

$$\measuredangle(x, y) := \arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|}\right) \tag{1.1}$$

Winkel zwischen x und y. Dabei sei daran erinnert, dass $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$, also $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$. Wir messen Winkel also immer im Bogenmaß.
Man sagt, dass x und y *senkrecht aufeinander stehen*, in Zeichen $x \perp y$, falls gilt

$$\measuredangle(x, y) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{oder äquivalent} \qquad \langle x, y \rangle = 0.$$

1.4 Definition (lineare Unabhängigkeit)**.** Drei Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ heißen *linear unabhängig*, falls sie in verschiedene Richtungen zeigen. Formal bedeutet das: Für alle $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ gilt die Implikation

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0 \Longrightarrow \lambda = \mu = \nu = 0.$$

Analog definiert man lineare Unabhängigkeit von zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ oder auch $\mathbb{R}^2$.

1.5 Bemerkung. Häufig findet man die den Winkel definierende Gleichung auch in der Form

$$\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\| \cos\left(\measuredangle(x, y)\right). \tag{1.2}$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu (1.1).

1.6 Satz (Eigenschaften des Kreuzproduktes)**.** Es seien $w, x, y, z \in \mathbb{R}^3$

(i). Anti-Kommutativität:

$$x \times y = -y \times x.$$

(ii). Orthogonalität:

$$x \times y \perp x \qquad \text{und} \qquad x \times y \perp y.$$

(iii). Winkelformel:

$$x \times y = \|x\|\|y\| \sin(\measuredangle(x, y))n, \qquad \text{wobei} \qquad n := n(x, y) := \frac{x \times y}{\|x \times y\|}. \tag{1.3}$$

(iv). Dreierformel:

$$(x \times y) \times z = \langle x, z\rangle y - \langle y, z\rangle x$$

(v). Jacobi-Identität: Das Kreuzprodukt ist nicht assoziativ, aber es gilt

$$(x \times y) \times z + (y \times z) \times x + (z \times x) \times y = 0.$$

(vi). Tripelprodukt:

$$(x \times y) \times (x \times z) = \langle x, y \times z\rangle x$$

(vii). Lagrange-Identität:

$$\langle w \times x, y \times z\rangle = \langle w, y\rangle\langle x, z\rangle - \langle x, y\rangle\langle w, z\rangle.$$

Insbesondere gilt

$$\|w \times x\|^2 = \|w\|^2\|x\|^2 - \langle w, x\rangle^2.$$

(viii). Spatprodukt:[1]

$$\langle x, y \times z\rangle = \langle y, z \times x\rangle = \langle z, x \times y\rangle = \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Beweis. [noch unvollständig] Alle Aussagen lassen sich durch grauenhafte Rechnungen beweisen.

(i). Per Definition gilt

$$x \times y = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_3y_2 - x_2y_3 \\ x_1y_3 - x_3y_1 \\ x_2y_1 - x_1y_2 \end{pmatrix} = -y \times x.$$

(ii). Es ist

$$\begin{aligned} \langle x \times y, x\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= x_1x_2y_3 - x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1 - x_1x_2y_3 + x_1x_3y_2 - x_2x_3y_1 = 0 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung folgt analog.

[1] Wer die Determinantenfunktion det noch nicht kennt, möge sich das letzte Gleichheitszeichen einfach wegdenken und sich merken, dass die Zahlen auf der linken Seite genau dann 0 sind, falls x, y, z linear abhängig sind.

(iii).

(iv).

(v).

(vi).

$$\begin{aligned}
\langle w \times x, y \times z\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} w_2x_3 - w_3x_2 \\ w_3x_1 - x_3w_1 \\ w_1x_2 - w_2x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2z_3 - y_3z_2 \\ y_3z_1 - z_3y_1 \\ y_1z_2 - y_2z_1 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= (w_2x_3 - w_3x_2)(y_2z_3 - y_3z_2) + (w_3x_1 - x_3w_1)(y_3z_1 - z_3y_1) + (w_1x_2 - w_2x_1)(y_1z_2 - y_2z_1) \\
&= (w_2x_3y_2z_3 - w_2x_3y_3z_2 - w_3x_2y_2z_3 + w_3x_2y_3z_2) \\
&+ (w_3x_1y_3z_1 - w_3x_1z_3y_1 - x_3w_1y_3z_1 + x_3w_1z_3y_1) \\
&+ (w_1x_2y_1z_2 - w_1x_2y_2z_1 - w_2x_1y_1z_2 + w_2x_1y_2z_1) \\
&= (w_1y_1x_1z_1 + w_1y_1x_2z_2 + w_1y_1x_3z_3) + (w_2y_2x_1z_1 + w_2y_2x_2z_2 + w_2y_2x_3z_3) \\
&+ (w_3y_3x_1z_1 + w_3y_3x_2z_2 + w_3y_3x_3z_3) - (x_1y_1w_1z_1 + x_1y_1w_2z_2 + x_1y_1w_3z_3) \\
&- (x_2y_2w_1z_1 + x_2y_2w_2z_2 + x_2y_2w_3z_3) - (x_3y_3w_1z_1 + x_3y_3w_2z_2 + x_3y_3w_3z_3) \\
&= (w_1y_1 + w_2y_2 + w_3y_3)(x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)(w_1z_1 + w_2z_2 + w_3z_3) \\
&= \langle w, y\rangle\langle x, z\rangle - \langle x, y\rangle\langle w, z\rangle
\end{aligned}$$

(vii).

□

2 Grundlagen: Euklidische Geometrie

"Mein Vater hat mir von 'nem allsehenden Auge in einem magischen Dreieck erzählt. Er sagte, es verlieh seinem Besitzer unglaubliche Macht. Macht über die Zeit. Er nannte es das 'Dreieck des Lichts'. Haben Sie je davon gehört?"
— Lara Croft, Grabräuberin, 1993

Es gibt verschiedene "Geometrien". Am berühmtesten ist sicherlich die euklidische, d.h. die ebene Geometrie. Im nächsten Kapitel wird die sphärische Geometrie behandelt, daneben gibt es auch noch die sog. hyperbolische Geometrie. Diese Geometrien haben viele Eigenschaften gemeinsam, aber auch fundamentale Unterschiede. Beispielsweise beträgt die Innenwinkelsumme eines euklidischen Dreiecks stets π (also 180°), in einem sphärischen Dreieck ist sie stets größer (siehe Satz 3.22) und in einem hyperbolischen Dreieck stets kleiner. Um die Unterschiede zwischen euklidischer und sphärischer Geometrie besonders gut zu sehen, wiederholen wir hier noch einmal kurz einige der wichtigsten Fakten aus der euklidischen Geometrie.

2.1 Definition (Gerade)**.** Für zwei verschiedene Punkte $A, B \in \mathbb{R}^2$ heißt

$$G(A,B) := G_2(A,B) := \{A + t(B-A) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

die *Gerade durch A und B*. Ein Punkt $C \in \mathbb{R}^2$ *liegt auf der Geraden $G(A,B)$*, falls $C \in G(A,B)$.

2.2 Definition (kolinear)**.** Drei Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ heißen *kolinear*, wenn sie auf einer Geraden liegen.

2.3 Definition (Halbebene)**.** Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ nicht kolinear. Dann trennt die Gerade $G(A, B)$ den $\mathbb{R}^2$ in zwei Teilmengen. Und da $C \notin G(A, B)$, muss C in genau einer dieser beiden Teilmengen liegen. Diese Teilmenge bezeichnen wir mit

$$H(A, B, C) := H_2(A, B, C) \subset \mathbb{R}^2.$$

2.4 Definition (Dreieck)**.** Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ nicht kolinear. Dann heißt

$$\Delta(A, B, C) := \Delta_2(A, B, C) := H_2(A, B, C) \cap H_2(B, C, A) \cap H_2(C, A, B) \subset \mathbb{R}^2$$

das von A, B, C *aufgespannte Dreieck*. Wir nennen A, B, C auch die *Eckpunkte des Dreiecks* . Häufig bezeichnet man mit

$$a := C - B, \qquad b := A - C, \qquad c := B - A,$$

die *Seiten des Dreiecks* und mit

$$\alpha := \measuredangle(-b, c), \qquad \beta := \measuredangle(-c, a), \qquad \gamma := \measuredangle(-a, b),$$

die *Innenwinkel* .

2.5 Bemerkung. Man beachte, dass wir hier "Dreieck" als Punktmenge definiert haben und "Seiten" als Vektoren. Nur die Seiten oder gar nur die Seitenlängen anzugeben genügt nicht, d.h. aus $\|a\|, \|b\|, \|c\|$ lässt sich im Allgemeinen das Dreieck nicht eindeutig zurückgewinnen.

2.6 Definition (Kreis)**.** Sei $M \in \mathbb{R}^2$ und $r > 0$. Dann heißt

$$K(M, r) := \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \|P - M\| = r\} \subset \mathbb{R}^2$$

Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r.

2.7 Satz (Kreisumfang)**.** Der Umfang eines Kreises $K(M, r)$ beträgt $2\pi r$.

2.8 Satz (Kugeloberfläche)**.** Der Oberflächeninhalt einer Kugel mit Radius R beträgt $4\pi R^2$.

2.9 Satz (Additionstheoreme)**.** Es gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

(i).
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\beta)\cos(\alpha).$$

(ii).
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

Insbesondere die Spezialfälle

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha), \qquad \sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha),$$

werden wir des öfteren benötigen.

2.10 Satz ("Trigonometrischer Pythagoras")**.** Es gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1.$$

2.11 Satz (Sinussatz)**.** Sei $\Delta_2(A, B, C)$ ein Dreieck. Dann gilt

$$\frac{\|a\|}{\sin(\alpha)} = \frac{\|b\|}{\sin(\beta)} = \frac{\|c\|}{\sin(\gamma)}.$$

2.12 Satz (Kosinussatz)**.** Sei $\Delta_2(A,B,C)$ ein Dreieck. Dann gilt

$$\|c\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\|\|b\|\cos(\gamma).$$

2.13 Satz (Innenwinkelsatz)**.** Die Innenwinkelsumme eines Dreiecks beträgt stets π, d.h.

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

2.14 Satz (Flächeninhalt)**.** Der Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta = \Delta_2(A,B,C)$ beträgt

$$|\Delta| := \|c\|\frac{\|h\|}{2},$$

wobei die *Höhe* h definiert ist durch

$$h := \frac{\langle a,b\rangle}{\|b\|^2}b.$$

3 Sphärische Geometrie

"Die Sphäre... seltsam. Wusstest du, dass er gelebt hat? Ja. Er ist hier - in der Sphäre selbst. Mit Gewissheit verstümmelt. Er ruft nun eine höhere Macht herbei. Nein, nicht Illidan."

— A'DAL, Herrscher der Sha'tar, 27

3.1 Definition (Sphäre)**.** Für $M \in \mathbb{R}^3$ und $r > 0$ nennen wir

$$\mathbb{S}(M,r) := \{P \in \mathbb{R}^3 \mid \|M - P\| = r\} \subset \mathbb{R}^3$$

die *Sphäre mit Radius r um M*. Die Menge

$$\mathbb{S} := \mathbb{S}(0,1)$$

heißt *Einheitssphäre* oder schlichtweg *Sphäre*.

3.2 Bemerkung. Der Einfachheit halber betrachten wir im Folgenden nur die Einheitssphäre, alle Überlegungen lassen sich aber auch auf beliebige Sphären verallgemeinern. Die Rechnungen sind dann allerdings etwas komplizierter.

3.3 Definition (antipodal)**.** Zwei Punkte $A, B \in \mathbb{S}$ heißen *antipodal*, falls

$$B = -A.$$

3.4 Definition (Ebene)**.** Seien $A, B \in \mathbb{S}$ verschieden und nicht antipodal. Dann heißt

$$E(A,B) := E_3(A,B) := \{\lambda A + \mu B \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

die *von A und B aufgespannte Ebene.*

3.5 Definition (Großkreise)**.** Seien $A, B \in \mathbb{S}$ verschieden und nicht antipodal. Dann heißt

$$G_{\mathbb{S}}(A,B) := \mathbb{S} \cap E(A,B) \subset \mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3$$

Großkreis durch A und B.

3.6 Definition (Großkreissegment)**.** Seien $A, B \in \mathbb{S}$ verschieden und nicht antipodal. Dann gibt es auf dem Großkreis $G_{\mathbb{S}}(A, B)$ zwei Verbindungsstrecken von A nach B. Die kürzere von beiden nennen wir *das Großkreissegment von A nach B*

$$GS_{\mathbb{S}}(A, B) \subset \mathbb{S}\,. \tag{3.1}$$

3.7 Bemerkung. Als Mengen sind die Großkreissegmente $GS_{\mathbb{S}}(A, B)$ und $GS_{\mathbb{S}}(B, A)$ gleich. Wir wollen uns trotzdem merken, wo das Segment beginnt und wo es aufhört.

3.8 Bemerkung. Nach Satz 2.7 beträgt der Umfang eines Kreises in der Ebene genau 2π. Da Großkreise aber gerade durch Kippen dieser Ebene im $\mathbb{R}^3$ entstehen, was den Kreisumfang nicht verändert, beträgt der Umfang eines Großkreises ebenfalls 2π.
Die Länge eines A und B verbindenden Großkreissegments $GS_{\mathbb{S}}(A, B)$ beträgt

$$\measuredangle(A, B).$$

3.9 Definition. Für ein Großkreissegment $GS_{\mathbb{S}}(A, B)$ heißt

$$T(A, B) := \frac{B - \langle A, B\rangle A}{\|B - \langle A, B\rangle A\|}$$

der *Tangentialvektor von* $GS_{\mathbb{S}}(A, B)$.

3.10 Lemma (Eigenschaften von Tangentialvektoren)**.**

(i). $B - \langle A, B\rangle A \neq 0$.

(ii). $A \perp T(A, B)$.

(iii). $T(A, B) \in E(A, B)$.

(iv). A und $T(A, B)$ sind verschieden und nicht antipodal

(v). $E(A, T(A, B)) = E(A, B)$.

(vi). $\|B - \langle A, B\rangle A\|^2 = 1 - \langle A, B\rangle^2$

Beweis.

(i). Angenommen dies wäre falsch, dann würde folgen:

$$B - \langle A, B\rangle A = 0 \implies B = \langle A, B\rangle A \implies \|B\| = |\langle A, B\rangle|\|A\|.$$

Nun ist aber $\|A\| = \|B\| = 1$ und daher $|\langle A, B\rangle| = 1$. Also ist $B = \pm A$. Widerspruch! Denn wir hatten A, B als verschieden und nicht antipodal vorausgesetzt.

(ii). Wir rechnen

$$\langle T(A, B), A\rangle = \left\langle \frac{B - \langle A, B\rangle A}{\|B - \langle A, B\rangle A\|}, A \right\rangle = \frac{\langle B, A\rangle - \langle A, B\rangle\langle A, A\rangle}{\|B - \langle A, B\rangle A\|} = 0,$$

da $\langle A, A\rangle = 1$ und $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$.

(iii). Es ist per Definition

$$T(A, B) = \underbrace{\frac{1}{\|B - \langle A, B\rangle A\|}}_{=:\lambda} B + \underbrace{\frac{-\langle A, B\rangle}{\|B - \langle A, B\rangle\|}}_{=:\mu} A \in E(A, B)$$

(iv). Das Gegenteil steht im Widerspruch zu (ii).

(v). Gemäß (iv) erzeugen A und $T(A,B)$ immerhin eine Ebene und aus (iii) folgt die Aussage.

(vi). Wir rechnen

$$\|B - \langle A,B\rangle A\|^2 = \|B\|^2 - 2\langle A,B\rangle^2 + \langle A,B\rangle^2\|A\|^2 = 1 - 2\langle A,B\rangle^2 + \langle A,B\rangle^2 = 1 - \langle A,B\rangle^2$$

□

3.11 Bemerkung (für Experten)**.** Ein Sinn des obigen Lemmas ist es, zu motivieren, warum wir Tangentialvektoren wie in 3.9 definiert haben. Wir sind auf diese Definition wie folgt gekommen: Angenommen auf dem Großkreis $G_{\mathbb{S}}(A,B)$ kreist ein Partikel herum, welches durch ein Seil im Ursprung festgehalten wird. Lässt man das Seil zu genau dem Zeitpunkt los, bei dem sich das Partikel durch den Punkt A bewegt und grade in Richtung B weiterkreisen will, dann zeigt der Geschwindigkeitsvektor des losgelassenen Partikels zum Zeitpunkt des Loslassens genau in Richtung $T(A,B)$. Wenn man sich mit mehrdimensionaler Analysis auskennt, kann man das so formalisieren: Sei

$$\begin{aligned} \gamma: \quad \mathbb{R} &\to \mathbb{S}, \\ t &\mapsto \tfrac{A+t(B-A)}{\|A+t(B-A)\|}, \end{aligned}$$

die Kurve in $G_{\mathbb{S}}(A,B)$, welche das kreisende Partikel beschreibt. Es gilt dann gerade $\gamma(0) = A$ und $\gamma(1) = B$. Man kann dann (mit Hilfe der verallgemeinerten Ableitungsregeln) zeigen, dass der Geschwindigkeitsvektor $\dot\gamma(t)$ die Gleichung

$$\dot\gamma(0) = T(A,B)$$

erfüllt.

3.12 Definition (sphärisch kolinear)**.** Drei paarweise verschiedene und paarweise nicht antipodale Punkte $A,B,C \in \mathbb{S}$ heißen *sphärisch kolinear*, falls $C \in G_{\mathbb{S}}(A,B)$.

3.13 Bemerkung. Falls übrigens A,B,C sphärisch kolinear sind, dann ist nur nur $C \in G_{\mathbb{S}}(A,B)$, sondern automatisch auch $A \in G_{\mathbb{S}}(B,C)$ und $B \in G_{\mathbb{S}}(A,C)$.

3.14 Definition (Hemisphäre)**.** Seien $A,B,C \in \mathbb{S}$ nicht sphärisch kolinear. Dann teilt $G_{\mathbb{S}}(A,B)$ die Sphäre in genau zwei Hälften, *Hemisphären* genannt. In genau einer von beiden muss C liegen. Diese Hälfte nennen wir

$$H(A,B,C) := H_{\mathbb{S}}(A,B,C) \subset \mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3.$$

3.15 Definition (sphärisches Dreieck)**.** Seien $A,B,C \in \mathbb{S}$ nicht sphärisch kolinear. Dann heißt

$$\Delta := \Delta_{\mathbb{S}}(A,B,C) := H_{\mathbb{S}}(A,B,C) \cap H_{\mathbb{S}}(B,C,A) \cap H_{\mathbb{S}}(C,A,B) \subset \mathbb{S}$$

sphärisches Dreieck mit Eckpunkten A,B,C. Wir bezeichnen mit

$$a := GS_{\mathbb{S}}(B,C), \qquad b := GS_{\mathbb{S}}(C,A), \qquad c := GS_{\mathbb{S}}(A,B)$$

die *Seiten von* Δ, mit $|a|$, $|b|$, $|c|$ die dazugehörigen Längen und mit

$$\alpha := \measuredangle(T(A,B),T(A,C)), \qquad \beta := \measuredangle(T(B,C),T(B,A)), \qquad \gamma := \measuredangle(T(C,A),T(C,B))$$

die *Innenwinkel von* Δ.

3.16 Lemma (Berechnung der Innenwinkel)**.** Sei $\Delta = \Delta_{\mathbb{S}}(A,B,C)$ ein sphärisches Dreieck. Dann gelten

$$\begin{aligned} \measuredangle(C \times A, A \times B) &= \pi - \alpha, \\ \measuredangle(A \times B, B \times C) &= \pi - \beta, \\ \measuredangle(B \times C, C \times A) &= \pi - \gamma. \end{aligned}$$

Beweis. Wir beweisen exemplarisch die ersten Gleichung und berechnen dazu zunächst

$$\begin{aligned}
-\cos(\pi-\alpha) &\overset{2.9,(ii)}{=} \cos(\alpha) = \cos(\measuredangle(T(A,B),T(A,C))) \\
&= \frac{\langle T(A,B),T(A,C)\rangle}{\|T(A,B)\|\|T(A,C)\|} = \langle T(A,B),T(A,C)\rangle \\
&= \left\langle \frac{B-\langle A,B\rangle A}{\|B-\langle A,B\rangle A\|}, \frac{C-\langle A,C\rangle A}{\|C-\langle A,C\rangle A\|} \right\rangle \\
&= \frac{\langle B,C\rangle - \langle A,C\rangle\langle B,A\rangle - \langle A,B\rangle\langle A,C\rangle + \langle A,B\rangle\langle A,C\rangle\langle A,A\rangle}{\|B-\langle A,B\rangle A\|\|C-\langle A,C\rangle A\|} \\
&= \frac{\langle B,C\rangle - \langle A,C\rangle\langle A,B\rangle}{\|B-\langle A,B\rangle A\|\|C-\langle A,C\rangle A\|} \overset{3.10,(vi)}{=} \frac{\langle B,C\rangle - \langle A,C\rangle\langle A,B\rangle}{\sqrt{(1-\langle A,C\rangle^2)(1-\langle A,B\rangle)^2}} \\
&\overset{1.6,(vii)}{=} \frac{\langle B,C\rangle - \langle A,C\rangle\langle A,B\rangle}{\|C\times A\|\|A\times B\|} = -\frac{\langle C,A\rangle\langle A,B\rangle - \langle A,A\rangle\langle C,B\rangle}{\|C\times A\|\|A\times B\|} \\
&= -\frac{\langle C\times A, A\times B\rangle}{\|C\times A\|\|A\times B\|} = -\cos(\measuredangle(C\times A, A\times B))
\end{aligned}$$

Jetzt kürzt sich auf beiden Seiten das Minuszeichen. Anwendung von arccos auf beiden Seiten liefert das Ergebnis. □

3.17 Korollar. Mit Satz 2.9 kann man Lemma 3.16 auch so formulieren: Es gilt

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha) &= \sin(\measuredangle(C\times A, A\times B), \\
\sin(\beta) &= \sin(\measuredangle(A\times B, B\times C)), \\
\sin(\gamma) &= \sin(\measuredangle(B\times C, C\times A)).
\end{aligned}$$

3.18 Lemma (Berechnung der Seitenlängen)**.** Sei $\Delta = \Delta_{\mathbb{S}}(A,B,C)$ ein sphärisches Dreieck. Dann gilt

$$\cos(|a|) = \langle B,C\rangle, \qquad \cos(|b|) = \langle A,C\rangle, \qquad \cos(|c|) = \langle A,B\rangle,$$

und außerdem

$$\sin(|a|) = \|B\times C\|, \qquad \sin(|b|) = \|A\times C\|, \qquad \sin(|c|) = \|A\times B\|.$$

Beweis. Wir zeigen exemplarisch jeweils die erste Gleichung: Nach Definition gilt

$$\cos(|a|) \overset{(3.1)}{=} \cos(\measuredangle(B,C)) = \frac{\langle B,C\rangle}{\|B\|\|C\|} = \langle B,C\rangle \tag{3.2}$$

und

$$\sin(|a|) \overset{2.10}{=} \sqrt{1-\cos(|a|)^2} \overset{(3.2)}{=} \sqrt{1-\langle B,C\rangle^2} \overset{1.6,(vii)}{=} \|B\times C\|.$$

□

3.1 Flächeninhalt und Innenwinkel

3.19 Definition (Mond)**.** Seien $A,B,B' \in \mathbb{S}$ nicht sphärisch kolinear. Dann heißt

$$M(A,B,B') := H_{\mathbb{S}}(A,B,B') \cap H_{\mathbb{S}}(A,B',B)$$

ein *Mond*. Dieser ist zwar kein sphärisches Dreieck, nichtsdestotrotz schneiden sich die beiden Großkreise im Punkt A und dort definieren wir analog

$$\alpha := \measuredangle(T(A,B), T(A,B'),$$

den *Winkel des Mondes*.

3.20 Lemma. Sei $M := M(A,B,B')$ ein Mond mit Winkel α. Dann erfüllt der Flächeninhalt $|M|$ von M

$$|M| = 2\alpha.$$

Beweis. Gemäß Satz 2.8 hat $\mathbb{S}$ den Flächeninhalt 4π. Die Hemisphäre $H_{\mathbb{S}}(A,B,B')$ hat also den Flächeninhalt 2π. Der Großkreis $G_{\mathbb{S}}(A,B')$ schneidet $H_{\mathbb{S}}(A,B,B')$ in zwei Teile, den Mond M und einen Rest. Das Verhältnis dieser beiden Flächen zueinander ist aber gerade der Winkel α. □

3.21 Konvention. Für eine Menge $X \subset \mathbb{R}^3$ sei

$$-X := \{-x \mid x \in X\}.$$

Wir sagen auch $-X$ geht aus X *durch Spiegelung hervor*.

3.22 Satz (Innenwinkelsatz)**.** Sei $\Delta = \Delta_{\mathbb{S}}(A,B,C)$ ein sphärisches Dreieck. Dann gilt

$$|\Delta| = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Beweis. Die drei Großkreise $G_{\mathbb{S}}(A,B)$, $G_{\mathbb{S}}(B,C)$, $G_{\mathbb{S}}(A,C)$ zerteilen die Sphäre $\mathbb{S}$ in insgesamt acht Flächen, die paarweise durch Spiegelung auseinander hervorgehen: Der Mond $M(A,B,C)$ wird durch $G_{\mathbb{S}}(B,C)$ in das Dreieck Δ und eine Restmenge $\tilde{M}_A$ unterteilt. Analoges gilt für die anderen Monde und somit erhält man eine disjunkte Zerteilung

$$\begin{aligned}
M_A &:= M(A,B,C) = \Delta \cup \tilde{M}_A \text{ , zerteilt durch das Großkreissegment } GS_{\mathbb{S}}(B,C),\\
M_B &:= M(B,A,C) = \Delta \cup \tilde{M}_B \text{ , zerteilt durch das Großkreissegment } GS_{\mathbb{S}}(A,C),\\
M_C &:= M(C,A,B) = \Delta \cup \tilde{M}_C \text{ , zerteilt durch das Großkreissegment } GS_{\mathbb{S}}(A,B).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Damit erhalten wir die vier Flächenstücke Δ, $\tilde{M}_A$, $\tilde{M}_B$, $\tilde{M}_C$. Wir stellen nun fest: Der Ball ist rund. Wir können das Dreieck spiegeln und die gesamte Situation nochmals genauso auf der Rückseite der Sphäre betrachten, d.h. wir erhalten dort die Flächenstücke $-\Delta$, $-\tilde{M}_A$, $-\tilde{M}_B$, $-\tilde{M}_C$, welche dieselben Relationen (3.3) erfüllen. Für die Fläche dieser Stücke gilt:

$$\begin{aligned}
2\alpha &\overset{3.20}{=} |M_A| \overset{(3.3)}{=} |\Delta| + |\tilde{M}_A|\\
2\beta &\overset{3.20}{=} |M_B| \overset{(3.3)}{=} |\Delta| + |\tilde{M}_B|\\
2\gamma &\overset{3.20}{=} |M_C| \overset{(3.3)}{=} |\Delta| + |\tilde{M}_C|.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Addiert man alle diese Gleichungen, so bekommt man

$$2(\alpha + \beta + \gamma) = 3|\Delta| + |\tilde{M}_A| + |\tilde{M}_B| + |\tilde{M}_C|. \tag{3.5}$$

Andererseits zerlegen unsere acht Flächenstücke die Sphäre. Daher gilt mit Satz 2.8

$$4\pi = |\Delta| + |-\Delta| + |\tilde{M}_A| + |-\tilde{M}_A| + |\tilde{M}_B| + |-\tilde{M}_B| + |\tilde{M}_C| + |-\tilde{M}_C|. \tag{3.6}$$

Nun ändert das Spiegeln den Flächeninhalt aber nicht. Daher können wir (3.6) vereinfachen zu

$$\begin{aligned} 4\pi &= 2|\Delta| + 2|\tilde{M}_A| + 2|\tilde{M}_B| + 2|\tilde{M}_C| \\ \iff 2\pi &= |\Delta| + |\tilde{M}_A| + |\tilde{M}_B| + |\tilde{M}_C|. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Dann nimmt man Gleichung (3.5) und zieht Gleichung (3.7) davon ab, d.h. wir erhalten

$$\begin{aligned} &(3.5) - (3.7) \\ \iff &2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = 3|\Delta| - |\Delta| = 2|\Delta|. \end{aligned}$$

Jetzt kann man die 2 kürzen und erhält die Aussage. □

3.23 Bemerkung. Die Größe $\alpha+\beta+\gamma-\pi$ nennt man auch den *Exzess* des Dreiecks. Der soeben bewiesene Satz 3.22 besagt also, dass der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks auf der Einheitssphäre gleich seinem Exzess ist. Im scharfen Gegensatz dazu besagt der Innenwinkelsatz 2.13 der euklidischen Geometrie, dass der Exzess eines euklidischen Dreiecks immer gleich Null ist. Daher ist dieser Begriff in der euklidischen Geometrie auch ausgesprochen uninteressant. Man beachte auch wie sehr der sphärische Innenwinkelsatz die Berechnung von Flächeninhalten vereinfacht, wenn man erst einmal die Winkel des Dreiecks kennt. Es ist nicht notwendig eine Höhe zu konstruieren, was ja bei der Berechnung der Flächeninhalte euklidischer Dreiecke üblicherweise gemacht wird; siehe 2.14. Bevor man in Jubel ausbricht, sollte man sich aber klar machen, dass die Berechnung der Winkel in der sphärischen Geometrie leider deutlich aufwendiger ist; siehe 3.16.

3.2 Trigonometrie

Bevor wir zu den klassischen Sätzen der sphärischen Trigonometrie kommen, benötigen wir noch ein technisches Lemma.

3.24 Lemma (Sinus/Tripelprodukt)**.** Sei $\Delta = \Delta_{\mathbb{S}}(A,B,C)$ ein sphärisches Dreieck. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|(A\times B)\times(B\times C)\| &= \sin(|c|)\sin(|a|)\sin(\beta), \\ \|(B\times C)\times(C\times A)\| &= \sin(|a|)\sin(|b|)\sin(\gamma), \\ \|(C\times A)\times(A\times B)\| &= \sin(|b|)\sin(|c|)\sin(\alpha). \end{aligned}$$

Beweis. Wir beweisen exemplarisch die erste Gleichung: Es gilt

$$\begin{aligned} \|(A\times B)\times(B\times C)\| &\overset{1.6,(iii)}{=} \|A\times B\|\|B\times C\|\sin(\measuredangle(A\times B, B\times C) \\ &\overset{3.17}{=} \|A\times B\|\|B\times C\|\sin(\beta) \\ &\overset{3.18}{=} \sin(|c|)\sin(|a|)\sin(\beta). \end{aligned}$$

□

3.25 Satz (Sinussatz)**.** Sei $\Delta = \Delta_{\mathbb{S}}(A,B,C)$ ein sphärisches Dreieck. Dann gilt

$$\frac{\sin(|a|)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(|b|)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(|c|)}{\sin(\gamma)}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} &(A\times B)\times(B\times C) \overset{1.6,(i)}{=} -(B\times A)\times(B\times C) \overset{1.6,(vi)}{=} -\langle B, A\times C\rangle B \overset{1.6,(i)}{=} \langle B, C\times A\rangle B, \\ &(B\times C)\times(C\times A) = \langle C, A\times B\rangle C \\ &(C\times A)\times(A\times B) = \langle A, B\times C\rangle A. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Die Normen der rechten Seiten dieser Gleichungen sind nach 1.6,(viii) gleich einer Konstanten $V \in \mathbb{R}$, denn $\|A\| = \|B\| = \|C\| = 1$. Insgesamt erhält man damit aus (3.8) und Lemma 3.24

$$\begin{aligned} \sin(|c|)\sin(|a|)\sin(\beta) &= V, \\ \sin(|a|)\sin(|b|)\sin(\gamma) &= V, \\ \sin(|b|)\sin(|c|)\sin(\alpha) &= V. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Kombination der Gleichungen liefert die Aussagen:

$$\begin{aligned} \sin(|c|)\sin(|a|)\sin(\beta) = \sin(|b|)\sin(|c|)\sin(\alpha) \quad &\Longleftrightarrow \quad \sin(|a|)\sin(\beta) = \sin(|b|)\sin(\alpha) \\ \sin(|c|)\sin(|a|)\sin(\beta) = \sin(|a|)\sin(|b|)\sin(\gamma) \quad &\Longleftrightarrow \quad \sin(|c|)\sin(\beta) = \sin(|b|)\sin(\gamma). \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. □

3.26 Satz (Sphärischer Winkel-Kosinussatz)**.** Sei $\Delta = \Delta_{\mathbb{S}}(A, B, C)$ ein sphärisches Dreieck. Dann gilt

$$\cos(|c|) = \cos(|a|)\cos(|b|) + \cos(\gamma)\sin(|a|)\sin(|b|).$$

Beweis. Es gilt mit der Lagrange-Identität 1.6,(vii)

$$\langle B \times C, A \times C\rangle = \langle B, A\rangle\langle C, C\rangle - \langle C, A\rangle\langle B, C\rangle = \langle B, A\rangle - \langle C, A\rangle\langle B, C\rangle.$$

Auf der rechten Seite benutzen wir Lemma 3.18 und erhalten

$$\langle B \times C, A \times C\rangle = \cos(|c|) - \cos(|b|)\cos(|a|)$$

Wir vertauschen die beiden Seiten der Gleichung und formen weiter um zu:

$$\begin{aligned} \cos(|c|) - \cos(|b|)\cos(|a|) = \langle B \times C, A \times C\rangle &\overset{(1.2)}{=} \|B \times C\|\|A \times C\| \cos(\measuredangle(B \times C, A \times C)) \\ &\overset{3.18}{=} \sin(|a|)\sin(|b|)\cos(\measuredangle(B \times C, A \times C)) \\ &\overset{1.6,(i)}{=} -\sin(|a|)\sin(|b|)\cos(\measuredangle(B \times C, C \times A)) \\ &\overset{3.16}{=} -\sin(|a|)\sin(|b|)\cos(\pi - \gamma) \\ &\overset{2.9}{=} \sin(|a|)\sin(|b|)\cos(\gamma). \end{aligned}$$

□

3.27 Bemerkung (für Experten)**.**

(i). Man beachte zunächst einmal die frappierende Ähnlichkeit dieses sphärischen Kosinussatzes 3.33 mit dem euklidischen Kosinussatz 2.12.

(ii). Wenn man nicht nur auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}$ arbeitet, sondern auf einer allgemeinen Sphäre $\mathbb{S}_r := \mathbb{S}(0, r)$ mit Radius $r > 0$, dann gilt auch dort eine verallgemeinerte Version des Winkel-Kosinussatz 3.33: Definiere die Zahl $\kappa := \kappa(r) := 1/r^2$ und die rellen Funktionen

$$\mathrm{cs}_\kappa : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ t & \mapsto & \cos(\sqrt{\kappa}t), \end{array} \qquad \mathrm{sn}_\kappa : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ t & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\sin(\sqrt{\kappa}t). \end{array}$$

Dann lautet der Seiten-Kosinussatz für ein Dreieck Δ auf einer Sphäre mit Radius r

$$\mathrm{cs}_\kappa(|c|) = \mathrm{cs}_\kappa(|a|)\,\mathrm{cs}_\kappa(|b|) + \kappa\,\mathrm{sn}_\kappa(|a|)\,\mathrm{sn}_\kappa(|b|)\cos(\gamma). \tag{3.10}$$

Weil die Rechnungen dann alle etwas schwieriger werden, haben wir uns hier entschieden, den Kosinussatz nur auf der Einheitssphäre zu beweisen. Dennoch wollen wir einen genaueren Blick auf Gleichung (3.10) werfen. Man beachte zunächst einmal, dass sie für $r = 1$ in den bewiesenen Kosinussatz 3.33 übergeht: Denn es gilt

$$r = 1 \Longrightarrow \kappa = 1 \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{cs}_\kappa = \cos, \\ \mathrm{sn}_\kappa = \sin . \end{cases}$$

(iii). Der euklidische Kosinussatz 2.12 wird ja auch in vielen Anwendungen (“Textaufgaben”) benutzt. Man hat sich vielleicht schon gefragt, warum dabei keine Fehler entstehen, denn schließlich ist die Erdoberfläche ja auch eine Sphäre und keine flache Ebene. Die Antwort lautet: Es entstehen Fehler! Eine Motivation für die Mathematiker der Antike, sphärische Geometrie zu studieren, war die Navigation von Schiffen über große Distanzen. Im Kleinen werden die Fehler kaum sichtbar. Das liegt daran, dass ein sehr kleines sphärisches Dreieck auf einer Sphäre mit sehr großem Radius sich fast genauso verhält wie in der euklidischen Ebene. Je größer der Radius der Sphäre, desto flacher wird das Dreieck. Man sagt auch: “Für $r \to \infty$ gehen die Formeln der sphärischen Geometrie in die der euklidischen Geometrie über.” Wenn man sich mit Grenzwerten und stetigen Funktionen auskennt, kann man dieser Aussage einen formalen Sinn und einen Beweis geben.

3.28 Definition (Pol)**.** Sei $G := G_{\mathbb{S}}(A, B)$ ein Großkreis. Dann heißt

$$P(G) := \frac{A \times B}{\|A \times B\|}$$

Pol von G. Man nennt manchmal auch P und $-P(G)$ *die Pole von G.*

3.29 Bemerkung. Zu jedem Großkreis G gibt es genau zwei Punkte in $\mathbb{S}$, welche von G maximalen Abstand haben. Diese Punkte sind gerade die Pole von G. Der Name kommt daher, dass auf der Erdoberfläche die Pole des Äquators gerade der Nord- und der Südpol sind.

3.30 Definition (Polardreieck)**.** Sei $\Delta := \Delta_{\mathbb{S}}(A, B, C)$ ein sphärisches Dreieck. Dann heißt

$$\begin{aligned} \Delta' := \Delta_{\mathbb{S}}(A', B', C') :=& \Delta_{\mathbb{S}}(P(G_{\mathbb{S}}(B, C)), P(G_{\mathbb{S}}(C, A)), P(G_{\mathbb{S}}(A, B))) \\ =& \Delta_{\mathbb{S}}\left(\frac{B \times C}{\|B \times C\|}, \frac{C \times A}{\|C \times A\|}, \frac{A \times B}{\|A \times B\|}\right) \end{aligned}$$

das *zu Δ zugehörige Polardreieck.* Diese hat dann ebenfalls Seitenlängen $|a'|$, $|b'|$, $|c'|$, und Innenwinkel α', β', γ'.

3.31 Lemma. Sei $\Delta := \Delta_{\mathbb{S}}(A, B, C)$ ein sphärisches Dreieck und $\Delta' := \Delta_{\mathbb{S}}(A', B', C')$ das zugehörige Polardreieck wie oben in 3.30.

(i). Dann ist Δ' wirklich ein sphärisches Dreieck im Sinne von Definition 3.15, d.h. A', B', C' sind sphärisch nicht kolinear.

(ii). Sei außerdem $\Delta'' := \Delta_{\mathbb{S}}(A'', B'', C'')$ das zu Δ' gehörige Polardreieck. Dann gilt

$$\Delta'' = \pm\Delta.$$

Man kann das auch so formulieren: Ist Δ' das zu Δ zugehörige Polardreieck, so ist auch Δ' das zu Δ gehörige Polardreieck bis auf evtl. eine Spiegelung. In jedem Falle hat Δ'' dieselben Seitenlängen und Innenwinkel wie Δ.

Beweis.

(i). Dies bitten wir euch zu glauben. :-(Der Beweis benötigt noch mehr Lineare Algebra als wir im Kapitel über Vektorrechnung schon zusammengestellt haben.

(ii). Nach Definition sind A, B, C nicht sphärisch kolinear, also insbesondere linear unabhängig. Dies ist gemäß Satz 1.6,(viii) äquivalent dazu, dass

$$\varphi := \langle A, B \times C\rangle = \langle B, C \times A\rangle = \langle C, A \times B\rangle \neq 0. \tag{3.11}$$

Dies liefert uns eine Zahl $\bar{\varphi} := \frac{\varphi}{|\varphi|} \in \{-1, 1\}$. Nun ist aber

$$(C \times A) \times (A \times B) = -(A \times C) \times (A \times B) \overset{1.6,(vi)}{=} -\langle A, C \times B\rangle A \overset{(3.11)}{=} \varphi A \tag{3.12}$$

Analoges gilt auch für die anderen Seiten und daher erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} A'' &= \frac{B' \times C'}{\|B' \times C'\|} = \frac{\frac{(C\times A)\times(A\times B)}{\|C\times A\|\|A\times B\|}}{\left\|\frac{(C\times A)\times(A\times B)}{\|C\times A\|\|A\times B\|}\right\|} = \frac{(C \times A) \times (A \times B)}{\|(C \times A) \times (A \times B)\|} \overset{(3.12)}{=} \frac{\varphi}{|\varphi|}A = \bar{\varphi}A, \\ B'' &= \bar{\varphi}B, \\ C'' &= \bar{\varphi}C, \end{aligned} \tag{3.13}$$

was zu zeigen war.

□

3.32 Lemma (Eigenschaften von Polardreiecken)**.** Sei Δ ein sphärisches Dreieck und Δ' das zugehörige Polardreieck. Dann bestehen zwischen den Seitenlängen und Innenwinkeln von Δ und Δ' die folgenden Beziehungen (Notation wie oben in 3.30):

$$|a'| = \pi - \alpha, \qquad |b'| = \pi - \beta, \qquad |c'| = \pi - \gamma,$$

sowie

$$\alpha' = \pi - |a|, \qquad \beta' = \pi - |b|, \qquad \gamma' = \pi - |c|.$$

Beweis. Wir zeigen exemplarisch jeweils die erste Formel. Es gilt

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \alpha) &\overset{3.16}{=} \cos(\measuredangle(C \times A, A \times B)) = \frac{\langle C \times A, A \times C\rangle}{\|C \times A\|\|A \times B\|} \\ &= \left\langle \frac{C \times A}{\|C \times A\|}, \frac{A \times B}{\|A \times B\|} \right\rangle = \langle B', C'\rangle \overset{3.18}{=} \cos(|a'|) \end{aligned}$$

und damit also $\pi - \alpha = |a'|$.
Um den zweiten Teil des Satzes zu beweisen, wenden wir den ersten Teil auf Δ' an: Für dessen Polardreieck gilt laut Lemma 3.31, dass $\Delta'' = \pm\Delta$. Daher gilt

$$|a''| = \pi - \alpha' \Longrightarrow |a| = \pi - \alpha' \Longrightarrow \alpha' = \pi - |a|.$$

□

3.33 Satz (Sphärischer Seiten-Kosinussatz)**.** Sei $\Delta = \Delta_{\mathbb{S}}(A, B, C)$ ein sphärisches Dreieck. Dann gilt

$$\cos(|c|)\sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\gamma).$$

Beweis. Wendet man Satz 3.26 auf das zu Δ zugehörige Polardreieck Δ', so erhält man zunächst

$$\cos(\gamma')\sin(|a'|)\sin(|b'|) = \cos(|c'|) - \cos(|a'|)\cos(|b'|). \tag{3.14}$$

Setzt man nun die Relationen aus Lemma 3.32 in diese Gleichung (3.14) ein, so erhält man

$$\cos(\pi - |c|)\sin(\pi - \alpha)\sin(\pi - \beta) = \cos(\pi - \gamma) - \cos(\pi - \alpha)\cos(\pi - \beta). \tag{3.15}$$

Verwendet man nun Satz 2.9, so bekommen wir

$$-\cos(|c|)\sin(\alpha)\sin(\beta) = -\cos(\gamma) - \cos(\alpha)\cos(\beta),$$

was die Aussage impliziert. □

References

[1] Ratcliffe, John: ”Foundations of Hyperbolic Manifolds”, Graduate Texts in Mathematics, Springer 2006

Index

Symbolverzeichnis