Collegium Logicum

Nikolai Nowaczyk <nikno@nullteilerfrei.de> http://math.nikno.de/
Lars Wallenborn <lars@wallenborn.net> http://math.wallenborn.net/

02.-04. Dezember 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Wahrheitswerte und Aussagen

"Mein teurer Freund, ich rat Euch drum
Zuerst Collegium Logicum."
MEPHISTOPHELES, 1773

1.1 Definition (Wahrheitswert)**.** Die Menge

$$\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$$

heißt die Menge aller *Wahrheitswerte*. Wir nennen den Wert 0 auch *falsch* und den Wert 1 *wahr*[1]. Eine Variable $p \in \mathbb{F}_2$ heißt *Aussage*.

1.2 Bemerkung. Formal ist ein Wahrheitswert und eine Aussage das Gleiche, der Unterschied liegt mehr in der Interpretation.

1.3 Bemerkung (Körperstruktur)**.** Auf der Menge $\mathbb{F}_2$ kann man eine Addition $+$ und eine Multiplikation $\cdot$ einführen, sodass $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ ein sogenannter *Körper* (engl. "field") mit zwei Elementen wird (so erklärt sich der Name $\mathbb{F}_2$). Ein Körper ist eine algebraischen Struktur, in der man genauso rechnen kann wie mit reellen Zahlen. Diese Tatsache ist zunächst nicht so wichtig. Der Vollständigkeit halber geben wir aber trotzdem an, wie diese Addition und Mulitplikation definiert ist, siehe auch Beispiel 2.7:

p_1	p_2	$+$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

p_1	p_2	$\cdot$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Abbildung 1.1: Addition und Multiplikation in $\mathbb{F}_2$

1.4 Bemerkung. In Übereinstimmung mit Definition 1.1 nennen wir p also falsch, falls $p = 0$ und wahr, falls $p = 1$. Insbesondere ist jede Aussage entweder wahr oder falsch. Wichtig ist vor allen Dingen, dass Aussagen nicht noch etwas anderes sein können, also z.B. "vielleicht richtig", "vermutlich falsch" oder "langweilig". Diesen Umstand nennt man *terium non datur*. Das ist Latein und bedeutet wörtlich "Ein Drittes gibt es nicht".

1.5 Definition (Aussagentupel)**.** Für jedes $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\mathbb{F}_2^k := \underbrace{\mathbb{F}_2 \times \ldots \times \mathbb{F}_2}_{k\text{ -mal}} = \{P = (p_1, \ldots, p_k) \mid \forall 1 \leq i \leq k : p_i \in \mathbb{F}_2\}.$$

Ein Element $P = (p_1, \ldots, p_k) \in \mathbb{F}_2^k$ ist also einfach eine geordnete Liste von k Aussagen, welches wir folglich *Aussagentupel* (der Länge k) nennen wollen.

1.6 Lemma. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\sharp \mathbb{F}_2^k = 2^k,$$

d.h. es gibt also genau 2^k Aussagentupel der Länge k.

Beweis. Dies folgt aus elementarer Kombinatorik: In einem jeden Tupel $P = (p_1, \ldots, p_k)$ kann jede Aussage p_i wahr oder falsch sein. Folglich gibt es für jede Aussage genau zwei Möglichkeiten und diese beiden Möglichkeiten gibt es genau k mal. □

[1] Aus diesem Grund schreiben einige auch $\{f, w\}$ anstatt $\{0, 1\}$.

2 Logische Funktionen

"Ach Spock, vergiss doch mal die Logik!"
SPOCK, 2258

2.1 Definition (logische Funktion)**.** Für jedes $k \in \mathbb{N}$ heißt eine Abbildung

$$L : \mathbb{F}_2^k \to \mathbb{F}_2$$

k-stellige logische Funktion. Ein solches L ordnet also jedem Aussagentupel $P = (p_1, \dots, p_k) \in \mathbb{F}_2^k$ eine Aussage $L(P) \in \mathbb{F}_2$ zu. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{L}^k := \{L : \mathbb{F}_2^k \to \mathbb{F}_2\}, \qquad \mathcal{L} := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^k$$

die Menge aller k-stelligen logischen Funktionen bzw. die Menge aller logischen Funktionen. Analog sei $L^{\leq k}$ die Menge aller logischen Funktionen mit $\leq k$ Stellen. Eine beliebige logische Funktion $L \in \mathcal{L}$ liegt auch in genau einem $\mathcal{L}^k$ und dies notieren wir mit

$$\|L\| := k.$$

2.2 Definition. Eine Funktion $L \in \mathcal{L}^1$ heißt auch *unärer Operator*, eine Funktion $L \in \mathcal{L}^2$ heißt auch *binärer Operator* oder *Junktor*, eine Funktion $L \in L^3$ heißt auch ternärer Operator.

2.3 Beispiel. Der Fall $k = 2$ ist besonders wichtig. Eine Funktion $L \in \mathcal{L}^2$ ist durch Angabe ihrer Werte auf den Tupeln $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ bereits eindeutig bestimmt. Man nennt die Argumente dann meistens p und q anstatt p_1 und p_2. Wir kennen schon die Funktionen $+$ und $\cdot$ aus 1.1. Die dort aufgeführten Tabellen heißen auch *Wahrheitswertetabellen.* In eine Wahrheitswertetabelle für eine beliebige logische Funktion der Ordnung $k = 2$ schreibt man erst alle möglichen 2-Tupel $(p, q) \in \mathbb{F}_2^2$ untereinander. Um dabei keins zu vergessen, zählt man diese am besten im Binärsystem ab. Danach legt man ganz rechts in der Tabelle noch eine Spalte an, in der man die Werte $L(p, q)$ der Funktion auf (p, q) hinschreibt. Für eine logische Funktion $L \in \mathcal{L}^3$ muss man alle 3-Tupel abzählen - das entspricht also den Binärzahlen 000 bis 111 - und dann ebenfalls die Werte der Funktion daneben schreiben. Für allgemeines k ist es etwas aufwändig hinzuschreiben, wie die Tabelle aussieht. Wir machen das jetzt aber trotzdem.

2.1 Wahrheitswertetabellen

2.4 Definition (Wahrheitswertetabelle)**.** Sei $L \in \mathcal{L}^k$ eine logische Funktion. Wir bezeichnen mit

$$\beta \in \mathbb{F}_2^{2^k \times k}$$

die Matrix, welche sich ergibt, indem man alle 2^k k-Tupel $P = (p_1, \dots, p_k)$ untereinander schreibt und zwar so sortiert als würde man im Binärsystem bei 0 beginnend hochzählen. Jede Zeile $\beta_{(i)} \in \mathbb{F}_2^{1\times k}$, $1 \leq i \leq 2^k$, ist dann ein Aussagentupel der Länge k. Folglich kann man den Funktionswert $L_i := L(\beta_{(i)})$ berechnen. Schreibt man alle diese Funktionswerte untereinander, so erhält man einen Spaltenvektor $L(\beta)$, den *Wertevektor* von L. Die Matrix

$$W(L) := \begin{pmatrix}\beta & L(\beta)\end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{2^k \times (k+1)}$$

heißt dann *Wahrheitswertetabelle von L.*

2.5 Bemerkung. Logische Funktionen sind eindeutig durch ihre Wahrheitswertetabelle bestimmt und eine jede solche Tabelle definiert eindeutig eine logische Funktion.

2.6 Bemerkung. Möchte man Wahrheitswertetabellen für verschiedene logische Funktionen $L_1, L_2 \in \mathcal{L}^k$ aufstellen, so muss man die Matrix β nur einmal aufstellen. Es ändern sich dann jedes Mal nur die Wertevektoren $L_1(\beta)$, $L_2(\beta)$. Möchte man gleich mehrere logische Funktionen definieren, schreibt man daher oft die Matrix β nur einmal hin und fügt daneben dann die Wertevektoren aller logischen Funktionen an, die man definieren möchte. Dies nennen wir dann eine *gemeinsame Wahrheitswertetabelle*.

2.7 Beispiel. Wir verstehen jetzt nochmals die Definition von $+$ und $\cdot$, indem wir ihre Wahrheitswertetabellen $W(+)$ und $W(\cdot)$ angeben:

p_1	p_2	$+$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

p_1	p_2	$\cdot$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Abbildung 2.2: Addition und Multiplikation in $\mathbb{F}_2$

In dieser Abbildung haben wir über die erste Zeile der Wahrheitswertetabelle gemäß Definition 2.4 zusätzlich noch die Namen p_1, p_2 der Variablen und der Funktion $+$ bzw. $\cdot$ geschrieben. Das muss man formal nicht machen, trägt aber enorm zur Lesbarkeit bei. Gemäß Bemerkung 2.6 könnten wir auch eine gemeinsame Wahrheitsweitetabelle für $+$ und $\cdot$ hinschreiben:

p_1	p_2	$+$	$\cdot$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Abbildung 2.3: Gemeinsame Wahrheitswertetabelle von $+$ und $\cdot$

2.8 Lemma. Es gilt

$$\#\mathcal{L}^k = 2^{(2^k)}$$

Mit Hilfe von Wahrheitswertetabellen können wir jetzt erst einmal ein paar berühmte Funktionen definieren. Die meisten davon sind sogar so berühmt, dass sie gleich mehrere Namen und einen eigenen Wikipedia-Artikel haben.

2.9 Definition (berühmte logische Funktionen)**.**

p	Kontradiktion	Identität	Negation, $\neg$	Tautologie
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Abbildung 2.4: Einstellige logische Funktionen

p	q	Disjunktion, OR, oder, $\vee$, $+$	Konjuktion, AND, und, $\wedge$	Implikation, $\rightarrow$	Äquivalenz, $\leftrightarrow$	XOR	NAND
0	0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0

Abbildung 2.5: Einige berühmte zweistellige logische Funktionen

2.10 Definition (Präfix-, Infix- und Postfixnotation)**.** So wie wir es bisher definiert haben, würde man die Auswertung eines Junktors $J \in \mathcal{L}^2$ auf den Argumenten (p, q) mit $J(p, q)$ notieren. Aber gerade, wenn J berühmt ist, z.B. $J = +$, sieht die Schreibweise $+(p, q)$ komisch aus. Diese Schreibweise heißt *Präfixnotation*. Die bekanntere Schreibweise

$$p + q := +(p, q)$$

heißt *Infixnotation*. Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass es auch eine *Postfixnotation* gibt, also

$$p\ q\ + := p + q,$$

die aber selten (in diesem Text gar nicht[2]) verwendet wird.

2.11 Bemerkung. Die Präfixnotation mag zwar komisch aussehen, hat aber den Vorteil, dass absolut klar ist, welche Funktion zuerst angewendet wird. Bei der Infixnotation muss man erstmal immer Klammern setzten: Sind L_1, L_2 Junktoren, so muss man

$$(p_1\ L_1\ p_2)\ L_2\ p_3$$

schreiben, weil nur für spezielle Funktionen, wie z.B. $+$ gilt

$$(p_1 + p_2) + p_3 = p_1 + (p_2 + p_3).$$

In diesem Fall heißt die Funktion übrigens *assoziativ*.

Aufgabe 1. Sei $p = 1$, $q = 0$, $r = 1$. Welchen Wert hat die folgende Aussage?

$$((p \rightarrow q) \wedge r) \leftrightarrow (r \vee p)$$

Aufgabe 2. Sei $p = 1$, $q = 1$, $r = 0$.

(i). Finde eine falsche Aussage in p und r, in der nur XOR als Funktion auftaucht.

(ii). Finde eine wahre Aussage in p und q, in der nur NAND als Funktion auftaucht

Aufgabe 3. Finde einen Junktor, der nicht assoziativ ist (mit Beweis).

[2] außer an dieser Stelle

3 Tautologien

"Die erste Regel des Tautologieclubs ist die erste Regel des Tautologieclubs."
VORSITZENDER DES TAUTOLOGIECLUBS, 1010

3.1 Definition (Typen logischer Funktionen)**.** Eine logische Funktion $L \in \mathcal{L}^k$ ist

(i). eine *Kontradiktion*, falls gilt:

$$\forall P \in \mathbb{F}_2^k : L(P) = 0.$$

(ii). eine *Tautologie*, falls gilt:

$$\forall P \in \mathbb{F}_2^k : L(P) = 1.$$

(iii). *falsifizierbar*, falls gilt:

$$\exists P \in \mathbb{F}_2^k : L(P) = 0.$$

(iv). *erfüllbar*[3], falls gilt:

$$\exists P \in \mathbb{F}_2^k : L(P) = 1.$$

(v). *kontigent*, falls gilt:

$$\exists P, Q \in \mathbb{F}_2^k : L(P) = 0 \text{ und } L(Q) = 1.$$

3.2 Bemerkung (Tautologien rocken!)**.** In anderem Kontext wird das Wort "tautologisch" oft abwertend für "leer", "inhaltslos", "nur formal" benutzt. In der Logik ist man sehr an Tautologien interessiert. Ist $L \in \mathcal{L}^k$ eine Tautologie und $P = (p_1, \ldots, p_k) \in \mathbb{F}_2^k$ irgendein Aussagentupel, dann ist $L(P) = 1$. Es ist also $L(P)$ wahr und zwar völlig unabhängig davon, ob die p_i wahr oder falsch sind. Jetzt fragt man sich vielleicht, wie solche Aussagen aussehen. Daher geben wir zwei sehr berühmte Tautologien an.

3.3 Satz (De Morgan'sche Gesetze)**.** Für beliebige Aussagen $(p, q) \in \mathbb{F}_2^2$ sind die Aussagen

$$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q, \qquad \neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q,$$

Tautologien.

3.4 Definition. Seien $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$. Wir schreiben

$$L_1 \Rightarrow L_2,$$

falls die Aussage $L_1 \to L_2$ eine Tautologie ist. Analog schreiben wir

$$L_1 \Leftrightarrow L_2,$$

falls die Aussage $L_1 \leftrightarrow L_2$ eine Tautologie ist.

[3] Die Philosophen sprechen von einer "möglichen Welt".

3.5 Satz (berühmte Tautologien).

(i). **doppelte Negation:** $\neg\neg p \Leftrightarrow p$

(ii). **Charakterisierung der Implikation:** $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg p \lor q)$

(iii). **Implikation umgedreht:** $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

(iv). **Verneinung der Implikation:** $\neg(p \to q) \Leftrightarrow (p \land \neg q)$

(v). **id falsum quot libet:** $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

(vi). **Kommutativität der Disjunktion:** $(p \lor q) \Leftrightarrow (q \lor p)$

(vii). **Kommutativität der Konjunktion:** $(p \land q) \Leftrightarrow (q \land p)$

(viii). **Charakterisierung der Äquivalenz:** $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \to q) \land (q \to p))$

Aufgabe 4. Beweise so viele Tautologien aus Satz 3.5, bis du keine Lust mehr hast. Wir legen doppelte Verneinung, Charakterisierung der Implikation und Charakterisierung der Äquivalenz besonders ans Herz.

3.6 Bemerkung. Der Nährwert einer Tautologie besteht also weniger in der konstanten Funktion 1 als solcher, sondern in der Information darüber, welche Funktionen Tautologien sind, obwohl man ihnen dies nicht sofort ansieht.

4 Interpretation von Aussagen

"Luke, auch du wirst noch entdecken, dass viele Wahrheiten, an die wir uns klammern, von unserem persönlichen Standpunkt abhängig sind. "

OBI-WAN KENOBI, 4 ABY

Bisher haben wir Aussagen p als Elemente in $\mathbb{F}_2$ definiert. Man kann nun solchen formalen Aussagen Sätze in natürlicher Sprache[4] zuordnen und umgekehrt.

4.1 Beispiel. Wir betrachten die Sätze

$$p := \text{"Anna besucht Paul."}$$
$$q := \text{"Anna besucht Fritz."}$$
$$r := \text{"Anna besucht Michael."}$$

Diese Sätze können wahr oder falsch sein und daher kann man sie als Aussagen $p, q, r \in \mathbb{F}_2$ auffassen. Dies scheint zunächst keinen Sinn zu ergeben. Man beachte aber, dass nun

$$\text{"Anna besucht weder Paul noch Fritz, sondern Michael."} = (\neg(p \lor q) \land r).$$

Den Vorgang einen Satz aus der natürlichen Sprache als logische Aussage zu schreiben, nennt man *formalisieren*.

4.2 Bemerkung. Dies ist nicht im Sinne eines präzisen formalen mathematischen Verfahrens zu verstehen. Wir appellieren hier an den gesunden Menschenverstand[5] die Konstruktionen aus der natürlichen Sprache in logische Aussagen und umgekehrt zu übersetzen. Wenn man dies formal präzise definieren wollte, so müsste man definieren, was eine Sprache ist, d.h. ihre Zeichen, gültige Zeichenketten etc. Dies sprengt aber den Rahmen dieses Skripts. Wir wollen uns daher damit begnügen, dieses Verfahren ein bisschen auszuprobieren.

[4] so nennen die Logiker Sprachen wie z.B. Deutsch und Englisch

[5] der mit zunehmender Beschäftigung mit Logik allerdings stetig schwindet

Aufgabe 5. Definiere

$p :=$ ”Paul ist mit Anna befreundet.”
$q :=$ ”Anna ist mit Paul befreundet.”
$r :=$ ”Paul studiert Medizin.”
$s :=$ ”Anna studiert Medizin.”

und formalisiere den Satz:

”Paul und Anna sind befreundet und studieren beide Medizin.”

Aufgabe 6. Definiere

$p :=$ ”Anna verbringt Silvester in München.”
$q :=$ ”Paul ist Silvester in München.”
$r :=$ ”Fritz ist in München.”
$s :=$ ”Michael ist in München.”

und formalisiere den Satz:

”Anna verbringt Silvester nur in München, wenn Paul dann auch dort ist oder Fritz und Michael nicht in München sind.”

Aufgabe 7. Definiere

$p :=$ ”Es regnet.”
$q :=$ ”Anna geht Kaffee trinken.”
$r :=$ ”Anna geht Eis essen.”
$s :=$ ”Michael geht Eis essen.”

und formalisiere den Satz:

”Wenn es regnet, geht Anna Kaffee trinken, ansonsten gehen sie und Michael Eis essen.”

Aufgabe 8. Betrachte folgenden Text:

”Wenn es heute regnet, dann nehme ich meinen Schirm mit. Regnet es nicht, dann nehme ich meine Badehose mit. Allerdings gehe ich immer schwimmen, wenn ich meine Badehose dabei habe und werde dann immer krank. Wenn ich meinen Schirm dabei habe, werde ich nicht krank. Folglich gilt in jedem Fall: Ich nehme heute die Badehose nicht mit oder ich nehme meinen Schirm mit.”

Zerlege diesen Text selbstständig in elementare Aussagen p, q, r u.s.w., formalisiere den letzten Schluss und überprüfe, ob der Schluss korrekt ist.

5 Vollständige Erzeugendensysteme

"Vielleicht wäre es besser für Sie es nicht zu wissen."
SEVEN OF NINE, 28. März 2377

5.1 Definition (j-Produkt)**.** Seien $k, n \in \mathbb{N}$, dann definieren wir für $1 \leq j \leq n$ das Produkt

$$\begin{aligned} \boxtimes_j : \mathcal{L}^k \times \mathcal{L}^n &\to \mathcal{L}^{k+n-1} \\ (g, f) &\mapsto g \boxtimes_j f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \boxtimes_j f : \mathbb{F}_2^{k+n-1} &\to \mathbb{F}_2 \\ (p_1, \ldots, \widehat{p_j}, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_k) &\mapsto f(p_1, \ldots, p_{j-1}, g(q_1, \ldots, q_k), p_{j+1}, \ldots, p_n) \end{aligned}$$

5.2 Definition (Term)**.** Sei $F \subset \mathcal{L}^{\leq n}$ eine beliebige Teilmenge. Wir definieren nun induktiv:

(i). $[F]_0 := F$

(ii). Sei $[F]_k$ schon definiert, dann definieren wir $[F]_{k+1} := \{g \boxtimes_i f \mid f, g \in [F]_k, 1 \leq i \leq \|f\|\}$

Ein Element von $[F]_k$ heißt *Term in F*. Die Menge aller Terme in F wird mit $[F]$ notiert, d.h.

$$[F] := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [F]_k.$$

5.3 Definition (Elementarmatrix)**.** Eine *Elementarmatrix vom Typ* $n \times k$ ist eine Matrix $E \in \mathbb{F}_2^{n \times k}$, sodass in jeder Zeile genau eine 1 steht, d.h.

$$\forall 1 \leq i \leq n : \exists! 1 \leq j \leq k : E_{ij} = 1.$$

Wir bezeichnen die Menge aller solcher Elementarmatrizen mit $\mathcal{E}^{n \times k}$.

Wir benötigen im folgenden den Begriff des Matrixprodukts, der vielleicht nicht allen bekannt ist. Daher geben wir hier eine formale Definition an.

5.4 Definition (Matrixprodukt)**.** Sei $A \in \mathbb{F}_2^{n \times k}$ und $B \in \mathbb{F}_2^{k \times m}$ so heißt die Matrix $C := AB \in \mathbb{F}_2^{n \times m}$ definiert durch

$$\forall 1 \leq i \leq n : \forall 1 \leq j \leq m : C_{ij} := \sum_{\nu=1}^{k} A_{i\nu} B_{\nu j}$$

Produkt von A und B. Bei der Summation und Multiplikation werden die Elementaroperationen verwendet, die in 2.7 definiert wurden.

5.5 Lemma. Produkte von Elementarmatrizen sind Elementarmatrizen, d.h. sind $E \in \mathbb{F}_2^{n \times m}$ und $F \in \mathbb{F}_2^{m \times k}$ Elementarmatrizen, so ist auch $EF \in \mathbb{F}_2^{n \times k}$ eine Elementarmatrix.

5.6 Definition (Erzeugnis)**.** Sei $F \subset \mathcal{L}^{\leq n}$ eine beliebige Teilmenge. Ein $f \in \mathcal{L}^n$ ist *von F erzeugt*, wenn es einen Term g in F und eine Elementarmatrix E vom Typ $\|g\| \times n$ gibt, $g \circ E = f$. Die Menge der Funktionen, die von F erzeugt werden heißt *logische Hülle von F* und wird mit $\langle F \rangle$ notiert.

5.7 Lemma. Sei $F \subset \mathcal{L}^{\leq n}$ eine beliebige Teilmenge, $f = g \circ E \in \langle F \rangle$, $n := \|f\|$, $g \in [F]$, $E \in \mathcal{E}^{\|g\| \times n}$.

(i). Ist $\tilde{E} \in \mathcal{E}^{n \times k}$ eine weitere Elementarmatrix, dann ist auch $f \circ \tilde{E} \in \langle F \rangle$.

(ii). Ist $\tilde{g} \in [F]$ ein weiterer Term und $1 \leq j \leq \|f\|$, dann ist auch $g \boxtimes_j f \in \langle F \rangle$.

Beweis.

(i). Folgt aus Lemma 5.5.

(ii). Folgt aus Definition 5.2.

□

5.8 Definition (vollständig)**.** Eine Teilmenge $F \subset \mathcal{L}^{\leq n}$ heißt *n-vollständig*, falls gilt $\langle F \rangle = \mathcal{L}^n$.

5.9 Lemma (Abgeschlossenheit der logischen Hülle)**.** Sei $F \subset \mathcal{L}^{\leq n}$, $f \in \langle F \rangle$, $|f| =: m$

(i). Wenn $\neg \in \langle F \rangle$, dann ist auch $\neg f \in \langle F \rangle$.

(ii). Wenn $\neg \in \langle F \rangle$ und $1 \leq j \leq m$, dann ist auch $\neg \boxtimes_j f \in \langle F \rangle$.

Beweis.

(i). Folgt aus der Definition der logischen Hülle und der Darstellung $\neg \circ f = f \boxtimes_1 \neg \in \langle F \rangle$.

(ii). Folgt aus der Definition der logischen Hülle und der Darstellung $\neg \boxtimes_j f$.

□

5.10 Satz (Vollständigkeit)**.** Die Menge $\{\neg, \vee, \wedge\} \subset \mathcal{L}^{\leq 2}$ ist 2-vollständig.

p q	0 0	0 1	1 0	1 1	lesbar	Zerlegung	Name
L_1	0	0	0	0	$p \wedge \neg p$	$L_{13} \boxtimes_2 L_2$	FALSE
L_2	0	0	0	1	$p \wedge q$	$\wedge$	AND
L_3	0	0	1	0	$\neg(p \to q)$	$\neg \circ L_{14}$	NIMP
L_4	0	0	1	1	p	$\mathrm{id} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$	
L_5	0	1	0	0	$\neg(q \to p)$	$\neg \circ L_{12}$	NREP
L_6	0	1	0	1	q	$\mathrm{id} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$	
L_7	0	1	1	0	$\neg(p \leftrightarrow q)$	$\neg \circ L_{10}$	XOR
L_8	0	1	1	1	$p \vee q$	$\vee$	OR
L_9	1	0	0	0	$\neg(p \vee q)$	$\neg \circ L_8$	NOR
L_{10}	1	0	0	1	$p \leftrightarrow q$	$L_{12} \boxtimes_1 (L_{14} \boxtimes_2 L_2)$	EQUI
L_{11}	1	0	1	0	$\neg q$	$\neg \circ L_6$	
L_{12}	1	0	1	1	$q \to p$	$L_3 \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	REP
L_{13}	1	1	0	0	$\neg p$	$\neg \circ L_4$	
L_{14}	1	1	0	1	$p \to q$	$L_{13} \boxtimes_1 L_8$	IMP
L_{15}	1	1	1	0	$\neg(p \wedge q)$	$\neg \circ L_2$	NAND
L_{16}	1	1	1	1	$p \vee \neg p$	$L_{11} \boxtimes_2 L_8$	TRUE

Abbildung 5.6: Zerlegung aller 2-stelligen logischen Funktionen in $\{\neg, \vee, \wedge\}$

Beweis. Wir gehen systematisch, aber geschickt, alle logischen Funktionen durch und zeigen durch sukzessive Anwendung von Lemma 5.7, dass jedes $L_1, \dots, L_{16} \in \langle F \rangle$, siehe 5.6.

Schritt 1: Per Definition sind $L_2 = \wedge, L_8 = \vee \in F \subset \langle F \rangle$.

Schritt 2: Es ist außerdem die Funktion $\mathrm{id} = \neg \circ \neg = \neg \boxtimes_1 \neg \in \langle F \rangle$. Außerdem gilt:

$$(\mathrm{id} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = p = L_4(p,q) \qquad\qquad (\mathrm{id} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = q = L_6(p,q)$$

und damit $L_4, L_6 \in \langle F \rangle$.

Schritt 3: Damit sind auch die Funktionen $L_{13} = \neg \circ L_4 \in \langle F \rangle$ und $L_{11} = \neg \circ L_6 \in \langle F \rangle$.

Schritt 4: Damit sind auch die Funktionen $L_1 = L_{13} \boxtimes_2 L_2$ und $L_{16} = L_{11} \boxtimes_2 L_8 \in \langle F \rangle$.

Schritt 5: Damit sind auch die Funktionen $L_9 = \neg \circ L_8, L_{15} = \neg \circ L_2$.

Schritt 6: Aus Satz 3.5(ii) wissen wir, dass

$$L_{14} = \rightarrow = L_{13} \boxtimes_1 L_8 \langle F \rangle.$$

und damit auch $L_3 = \neg \circ L_{14} \in \langle F \rangle$. Damit folgt aus

$$L_{12}(p,q) = L_3(q,p) = L_3 \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},$$

dass auch $L_{12} \in \langle F \rangle$. Damit ist dann allerdings auch $L_5 = \neg \circ L_{12} \in \langle F \rangle$.

Schritt 7: Aus Satz 3.5(viii) folgt

$$L_{10} = L_{12} \boxtimes_1 (L_{14} \boxtimes_2 L_2) \in \langle F \rangle$$

und somit schließlich auch $L_7 = \neg \circ L_{10} \in \langle F \rangle$.

□

Aufgabe 9. Zeige, dass auch die Mengen

(i). $\{\neg, \rightarrow\} \subset \mathcal{L}^{\leq 2}$ und

(ii). $\{\mathrm{NAND}\} \subset \mathcal{L}^{\leq 2}$

2-vollständig sind.

Aufgabe 10. Zeige, dass die Mengen $\{\neg, \vee, \wedge\}, \{\neg, \rightarrow\}, \{\mathrm{NAND}\} \subset \mathcal{L}^{\leq 2}$ auch 1-vollständig sind.

Index

Symbolverzeichnis